La lógica matemática se ha desarrollado considerablemente en nuestro siglo; una de sus disciplinas más potentes es la teoría de modelos, que permite analizar los sistemas axiomáticos recurriendo a la idea de modelo como aquellas entidades que satisfacen los axiomas. Mientras que los modelos ordinarios, en diseño, arquitectura o en las ciencias empíricas, son una representación, en lógica la representación es la teoría y aquello que se representa es el modelo. El objeto de la teoría es el estudio de las relaciones entre los lenguajes formales y las realidades de que hablan dichos lenguajes, la clase de los objetos o sistemas, mediante la noción de verdad. Ejemplos de los resultados más notables de la teoría son el teorema de Löwenheim, según el cual si un enunciado tiene un modelo infinito, tiene uno numerable, el teorema de completud sobre la generabilidad de las fórmulas lógicamente válidas, etc. En la Teoría de modelos, María Manzano presenta con claridad un manual de la teoría clásica de modelos, la parte más importante y accesible de la disciplina. En los primeros capítulos se introducen las nociones básicas de Algebra universal, la semántica de la lógica de primer orden y su completud. A continuación se tratan las nociones básicas de la teoría, el teorema de compacidad y los de Löwenheim-Skdem, para terminar con el estudio de las teorías completas y las categorías. Asimismo contiene un Apéndice sobre cardinales y ordinales en beneficio de los lectores con unos conocimientos mínimos de teoría de conjuntos. Concebido como un manual pedagógico, contiene asimismo problemas y ejercicios en todos los capítulos.

María Manzano
Teoría de modelos

Alianza Universidad Textos

María Manzano

Teoría de Modelos

Alianza
Editorial

Calle Milán, 38; 28043 Madrid; teléf. 200 00 45
ISBN: 84-206-8126-1
Depósito legal: M. 4.766-1989
Fotocomposición: EFCA, S. A.
Dr. Federico Rubio y Galí, 16. 28039 Madrid
Impreso en Offirgraf
Calle Los Naranjos, 3. S. S. de los Reyes (Madrid)
Printed in Spain

A mis padres

INDICE

PROLOGO

El extraordinario desarrollo de la lógica matemática en el siglo XX ha dado lugar a numerosas subdisciplinas, de entre las cuales destacan dos por su incomparable belleza, potencia, rigor y perfección: la teoría de la recursión y la teoría de modelos. En ambas disciplinas se han alcanzado resultados definitivos, que permanecerán en el acervo científico de la humanidad durante todo el futuro previsible. Sin embargo, no conviene olvidar que se trata de teorías matemáticas puras y que las palabras que emplean son términos técnicos cuyo sentido no siempre coincide con el que tienen en el lenguaje ordinario, en la filosofía o en la ciencia empírica.

Tanto en el lenguaje cotidiano como en el científico la palabra *modelo* se usa en dos sentidos distintos e incluso contrapuestos. Ambos tienen que ver con la relación en que está una representación con lo por ella representado. El problema estriba en que el modelo se identifica a veces con el primer término de la relación (con la representación), y otras veces con el segundo (con lo representado). Así, en el primer sentido, se dice que la escultura a escala reducida que representa al barco o al avión es un modelo del barco o del avión, o se habla en economía o en cosmología de modelos econométricos o de modelos cosmológicos, entendiéndose por tales ciertas representaciones matemáticas del mercado o del universo. En todos estos y otros muchos casos el modelo es una representación. En la lógica matemática, por el contrario, a la representación se la llama teoría, y a lo representado, modelo de la teoría. Este uso es contrario al habitual en las ciencias empíricas, pero coincide con el de pintores y fotógrafos, cuando hablan de la modelo (lo representado) como objeto del cuadro o de la foto (la representación). Es en este sentido en el que hay que entender la palabra modelo que aparece en la teoría de modelos desarrollada por los lógicos matemáticos y expuesta en este libro.

La manera clásica de describir la tarea de la teoría de modelos consiste en decir que en ella se estudian las relaciones entre los lenguajes formales, por un lado, y las realidades de que hablan dichos lenguajes, por otro. Esto es correcto, mientras se

tenga bien presente que tanto los lenguajes como las realidades mencionadas no son lenguajes y realidades en sentido habitual de estas palabras, sino en otro sentido muy distinto y *sui generis*. Así, por ejemplo, cualquier objeto matemático puede considerarse como un nombre de alguno de estos lenguajes. Todos los números complejos o los ordinales o los vectores de un cierto espacio vectorial son «nombres» de «lenguajes» imposibles de hablar o escribir, pero no por ello menos lenguajes en el sentido de la teoría de modelos. La «realidad» con que esos «lenguajes» se ponen en relación es también una realidad problemática y *sui generis*. Mara la identifica aquí con el universo matemático absoluto, lo cual resulta ser la elección pedagógicamente más conveniente e intuitiva, avalada además por santos patrones tan venerables como el propio Kurt Gödel. Sin embargo, sería ingenuo (pienso yo) considerar que esa noción de un universo matemático absoluto y platónico es una noción clara y sin graves problemas.

Los «lenguajes» de que habla la teoría de modelos son sistemas matemáticos. Y las cosas (grupos, órdenes, espacios, sistemas de Peano...) representadas en esos lenguajes son también sistemas matemáticos. La teoría de modelos no es una teoría semántica que ponga en relación los lenguajes naturales con la realidad física y social, sino una teoría matemática que pone en relación unos sistemas matemáticos con otros sistemas matemáticos.

La definición exacta de la noción de verdad de una fórmula en un sistema no resuelve por sí misma el problema de dilucidar lo que entendemos por verdad de un enunciado en el lenguaje hablado, que sigue sin resolver. La precisión alcanzada para la noción de modelo de una teoría no es trasladable sin más a los modelos cosmológicos acerca del origen y evolución del universo en física. La teoría de modelos (como la de la recursión) nos ofrece un ejemplo de rigor, pone a nuestra disposición herramientas conceptuales potentes y nos señala que ciertos caminos no conducen a ninguna parte, pero no es una panacea filosófica. Su conocimiento es una condición necesaria, pero no suficiente, para quien desee hacer filosofía teórica en serio.

Aunque la teoría clasica de modelos es un producto de los años 50's, sus antecedentes pueden rastrearse varias décadas atrás. Ya en 1915 Löwenheim había probado que si una fórmula tiene realizaciones o modelos de alguna cardinalidad infinita (posiblemente supernumerable), entonces también tiene modelos enumerables. Ese resultado fue luego extendido por Skolem a conjuntos cualesquiera de fórmulas. Así surgió la primera versión del teorema de Löwenheim-Skolem, que acabaría convirtiéndose en uno de los puntos focales de la teoría de modelos. En 1919 introdujo Skolem el procedimiento de la eliminación de cuantificadores para determinar qué relaciones son definibles (en primer orden) en un sistema. En 1930 publicó Gödel su tesis doctoral, en la que demostraba la suficiencia o completud semántica del cálculo lógico de primer orden, de la que se seguía como corolario el teorema de compacidad, es decir, que si todo subconjunto finito de un conjunto dado (y posiblemente infinito) de fórmulas tiene un modelo, entonces el conjunto dado entero también tiene un modelo. Así, en 1930, tres de las herramientas clásicas de la teoría de modelos (el método de la eliminación de cuantificadores y los teoremas de Lowenheim-Skolem y de compacidad) estaban ya disponibles. Sin embargo, aún pasarían 20 años más antes de que cristalizasen en la constitución de la teoría de modelos. El catalizador de esa cristalización fue el gran lógico polaco Alfred Tarski.

Desde 1926 Tarski dirigía un seminario en Varsovia, en donde el procedimiento de Skolem de la eliminación de cuantificadores era empleado consecuentemente para el estudio de clases de sistemas. Durante esos mismos años Tarski ofreció la primera definición precisa de los conceptos absolutos de satisfacción, verdad y consecuencia (1934), aunque sólo en 1957 definió (junto con R. Vaught) las nociones de satisfacción y verdad en un sistema, que son las usadas en teoría de modelos. En 1939 emigró Tarski a Estados Unidos, dentro de aquella gran ola de emigración de científicos centroeuropeos que hizo que el centro de gravedad de la investigación mundial pasara de Europa a Norteamérica. Desde 1942 enseñó Tarski en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de California en Berkeley. A su alrededor se fue formando el grupo de investigadores que en los años 50's producirían la teoría clásica de modelos. Por ejemplo, los dos autores del libro de texto estándar de esta disciplina, *Model Theory* (1973), C. Chang y H. J. Keisler, fueron ambos alumnos suyos en Berkeley.

Los años 50's fueron la época dorada de la teoría clásica de modelos. La noción fundamental de equivalencia elemental fue introducida por Tarski a comienzos de la década, en 1950. En 1954 se dio a conocer el famoso teorema o test de Vaught para completud de teorías: si una teoría tiene sólo modelos infinitos y es k-categórica para algún cardinal infinito k, entonces es completa. En 1956, el de Robinson: si una teoría modelo-completa tiene un modelo principal, entonces es completa. En 1957 Tarski y Vaught introdujeron la noción de subsistema elemental. Otros investigadores, como L. Henkin y A. Malcev, hicieron también contribuciones fundamentales. La década culminó con el descubrimiento o invención del análisis no-estándar por Abraham Robinson en 1960.

En los años 60's la investigación en teoría de modelos se aplicó a diversas extensiones de la lógica de primer orden, que la superaban en potencia. Ya se sabía que para la lógica estándar de segundo orden no valen los teoremas de compacidad ni de Löwenheim-Skolem. Pero no se sabía cuál era la situación para las diversas lógicas intermedias entre la de primer y la de segundo orden. Así, por ejemplo, una de esas lógicas intermedias es la de los lenguajes formales infinitarios, en los que está permitido formar conyunciones y disyunciones de longitud infinita. C. Karp (1964), Keisler (1971) y otros desarrollaron su teoría de modelos, en la que no vale el teorema de compacidad, pero sí el de Lowenheim-Skolem. Lo contrario ocurre con la lógica que admite un cuantificador Q que indica que hay un número infinito supernumerable de individuos que satisfacen una condición. En su teoría de modelos vale el teorema de compacidad (G. Fuhrken 1964), pero no el de Löwenheim-Skolem, naturalmente.

De hecho todas las lógicas más potentes o expresivas que la de primer orden exploradas tenían en común el que en ellas fallaba al menos uno de los dos teoremas fundamentales de la teoría de modelos, el de compacidad o el de Lowenheim-Skolem. Esta línea de investigación culminó al final de la década con la prueba por Lindstrom en 1969 de que esa situación no era casual: es imposible que haya lógicas más expresivas que la de primer orden en que valgan a la vez ambos teoremas. El incremento en poder expresivo (es decir, en capacidad de caracterización unívoca hasta isomorfía de estructuras) de las extensiones de la lógica de primer orden se paga al precio de un empobrecimiento de sus respectivas teorías de modelos.

En 1965 M. Morley probó que si una teoría completa (en un lenguaje enumerable)

es k-categórica para algún cardinal supernumerable k, entonces es k-categórica para cualquier cardinal supernumerable k. Para probarlo introdujo unas técnicas conjuntistas nuevas y potentes, que subsiguientemente fueron adoptadas, refinadas y ampliadas por S. Shelah, dando así lugar a una nueva línea de investigación, que dominaría la teoría de modelos en los años 70's y acabaría conduciendo al desarrollo impresionante de la teoría de la estabilidad, que continúa en nuestros días. De todos modos, estos desarrollos más recientes y difíciles de la teoría desbordan ya por completo el ámbito y el nivel de este libro.

El libro de Mara Manzano que el lector tiene ahora en sus manos es una presentación de la teoría clásica de modelos de la lógica de primer orden, desarrollada en los años 50's y expuesta en libros de texto por primera vez en los años 60's y 70's. Se trata de la parte más importante y accesible de la teoría de modelos, y su conocimiento es también necesario para aquellos que pretendan explorar las ramas laterales de la teoría o acceder a la frontera de la investigación actual.

Mara Manzano ha estado siempre especialmente interesada en las extensiones de la lógica de primer orden, desde su tesis doctoral, que versaba sobre la lógica de segundo orden, hasta el momento actual, en que trabaja activamente en la aplicación de la lógica multivariada y otras extensiones de la lógica de primer orden a la lógica dinámica y a la informática teórica. Ese permanente interés suyo sólo aflora en este libro en el capítulo VI, cuando discute los modelos no-estándar de la lógica de segundo orden y su relación con los modelos no-estándar de la aritmética. Que, a pesar de ello, Mara se limite aquí a la lógica de primer orden se debe a acertadas consideraciones de orden pedagógico. En efecto, este libro es obviamente un libro de texto, escrito para los alumnos, como se nota a cada paso en el estilo escolar y coloquial en que está escrito, que recuerda más la exposición oral del profesor en la clase que el tono impersonal de las monografías científicas. Y a los alumnos la teoría de modelos que más les interesa aprender es la clásica, la de la lógica de primer orden.

Hace veinte años la lógica era una disciplina ignorada y semiclandestina en nuestro país. Para mí es una gran satisfacción personal observar el nivel que desde entonces ha alcanzado, al menos en la Universidad de Barcelona. A ese progreso ha contribuido decisivamente una nueva generación de lógicos españoles, a la que pertenece Mara Manzano, formada en Barcelona, Berkeley y Leeds, y cuya simpatía y competencia apreciamos cuantos la conocemos. Por eso resulta tan agradable para mí presentar este libro, el primero escrito en lengua española sobre teoría de modelos y uno de los pocos existentes en cualquier lenguaje sobre esta disciplina. Ojalá obtenga amplia difusión y contribuya así al afianzamiento de los estudios lógicos en España y Latinoamérica.

Moià, octubre de 1988
Jesús MOSTERÍN

INTRODUCCION GENERAL

La Teoría de Modelos es la rama de la Lógica matemática que se ocupa de las relaciones entre las estructuras matemáticas y los lenguajes formales. El esquema abstracto de la Teoría de Modelos es así: Tenemos un lenguaje L y una clase de objetos $\mathcal{M}$ que son los sistemas, y entre estos dos tipos de realidades tendemos un puente: la noción de verdad. Este planteamiento, aparentemente tan simple, proporciona una gran flexibilidad y alcance a la Teoría de Modelos.

El gran impulsor de las investigaciones en este área fue Tarski, que habiendo precisado y definido los conceptos semánticos de verdad y consecuencia posibilitó esta generalización, modernización y desmadre de la semántica que es la Teoría de Modelos. A él le cabe el mérito de la concepción y dirección de un programa de investigación sistemática en esta disciplina. Aunque las raíces estaban echadas ya, y algunos de los teoremas que ahora incluimos en Teoría de Modelos —como el de Löwenheim-Skolem— habían sido demostrados tiempo ha, el programa de investigación no comienza hasta los años treinta y la Teoría de Modelos no se consolida como disciplina independiente hasta los años cincuenta. El propio nombre de Teoría de Modelos fue utilizado por primera vez por Tarski en 1954. Los pioneros en el estudio de esta disciplina, aparte de los ya mencionados, fueron Gödel, Henkin, Robinson, Vaught, Craig y Addison, integrantes casi todos ellos (con la excepción de Gödel y Robinson, Abraham) del recién creado Group in Logic and the Methodology of Science de Berkeley.

¿Qué tipos de teoremas demostramos en Teoría de Modelos?

El teorema más antiguo es el de Löwenheim de 1915 que dice que si una sentencia tiene un modelo infinito, entonces tendrá también uno numerable. Posteriormente, en el 1919, Skolem lo extendió a conjuntos de sentencias. Y más tarde, en el 1957, Tarski y Vaught demostraron versiones más potentes del mismo.

Otro resultado clásico es el teorema de compacidad, que afirma que un conjunto Γ de sentencias tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito suyo lo tiene. El teorema de compacidad fue demostrado inicialmente por Gödel en el año 1930 como

parte de su teorema de completud. Sin embargo, la prueba más conocida, por ser más sencilla y adaptable que la original, es la de Henkin de 1949.

El teorema de completud establece la equivalencia entre la sintaxis y la semántica de un cierto lenguaje. El concepto semántico de verdad sirve para seleccionar las fórmulas lógicamente válidas: las que son verdaderas en todos los sistemas. El cálculo deductivo, de naturaleza sintáctica, genera el conjunto de las fórmulas que se pueden probar sin utilizar premisas en el cálculo: los teoremas lógicos. El teorema de completud nos asegura que las fórmulas lógicamente válidas se pueden generar sin premisas con las reglas del cálculo. El teorema de corrección nos dice que todas las fórmulas generadas sin premisas en el cálculo son lógicamente válidas. Y no sólo para fórmulas aisladas, se demuestra también el teorema fuerte de completud que dice que las consecuencias de un conjunto de fórmulas son los teoremas deducibles a partir del conjunto.

Utilizando el teorema de completud demostramos el de compacidad como un corolario sencillo. Sin embargo, el enunciado del teorema de compacidad es de naturaleza puramente semántica y puede ser resuelto sin apelar a la noción de deducibilidad: combinando los modelos de los conjuntos finitos para construir el del conjunto infinito. También demostraremos compacidad de esta manera: utilizando el concepto booleano de ultrafiltro (filtro maximal) y construyendo como modelo del conjunto infinito un ultraproducto. Hay otra forma de demostrar compacidad, que también aplicaremos, que es utilizar el concepto de diagrama.

De hecho, hay muchas formas distintas de construir modelos, aparte de las mencionadas, y a veces (Chang-Keisler) se utiliza como criterio unificador para ordenar y exponer la variedad de resultados conocidos en Teoría de Modelos.

He comentado algunos de los teoremas más famosos y antiguos de nuestra disciplina, todos formulados y demostrados antes de los años cincuenta. Tengo que señalar, sin embargo, que fue la técnica conocida como Eliminación de cuantificadores la que sirvió de hilo conductor y base del programa de investigación de Teoría de Modelos.

En 1919 Skolem había introducido esta técnica para estudiar las relaciones definibles en un sistema dado. Tarski vislumbró el potencial que este procedimiento albergaba y pensó que centrándose en ciertas clases de sistemas interesantes, la eliminación de cuantificadores podría servir no sólo para determinar las relaciones definibles en los sistemas considerados, sino también para clasificar los sistemas en estudio utilizando la relación de equivalencia elemental y para establecer su eventual axiomatización. De esta forma introduce el concepto de teoría completa: aquella cuyos modelos son, dos a dos, elementalmente equivalentes. El programa de Tarski se mantuvo durante varias décadas y sufrió una remodelación importante a manos de Robinson. Este último introdujo el concepto de modelo-completud, utilizando las relaciones de subsistema elemental y de inmersión elemental. También es obra de Robinson el llamado Análisis no estándar, el niño bonito de la Teoría de Modelos: unos modelos del Análisis en donde se instalan con carta de ciudadanía los infinitesimales de Leibniz. Aunque la existencia de modelos no estándar se sigue de los teoremas de Löwenheim-Skolem, y se conocían desde antiguo, fue mérito de Robinson el utilizarlos no como monstruos de feria, sino como alternativas a los modelos tradicionales, y explotar las ventajas que estos brindaban. También Henkin explota

positivamente la existencia de modelos no estándar, pero en el marco de la Lógica superior.

De todas estas cuestiones hablaré en este libro; no entraremos en la Segunda etapa de la Teoría de Modelos, que inaugura Morley, la denominada Teoría de la Estabilidad, ni seguiremos los derroteros por los que Shelah en los años setenta se mueve y, menos aún, nos adentraremos en la Siberia de la mano de Boris Zil'ber. Estos temas son de carácter mucho más elevado y yo no puedo servir de guía.

Este libro está organizado en siete capítulos:

I. NOCIONES BASICAS: ALGEBRA UNIVERSAL

En este capítulo defino a los sistemas como tripletes formados por un conjunto no vacío, llamado universo o ámbito del sistema, y una serie de relaciones y funciones definidas sobre el universo.

Algunos sistemas tienen una estructura matemática conocida: son grupos, anillos, cuerpos, órdenes, sistemas de Peano o álgebras de Boole. Estudiaremos cómo identificar a los sistemas que posean alguna de estas estructuras.

Finalmente defino las relaciones entre sistemas, propias del álgebra universal, que no utilizan como vehículo el lenguaje formal. En particular, estudiaremos con considerable detalle las nociones de: subsistema, reducción, homomorfismo, inmersión e isomorfismo.

II. LENGUAJES DE PRIMER ORDEN: SEMANTICA

Este segundo capítulo lo dedico a la semántica de la lógica de primer orden. Para hablar de un sistema $\mathscr{A}$ se precisa un lenguaje adecuado, $L(\mathscr{A})$, que contenga tantos relatores como relaciones haya en el sistema y tantos functores como funciones tenga el sistema. En especial, estudiaremos los lenguajes adecuados para hablar de grupos y órdenes, junto con el lenguaje de la aritmética y el de la teoría de conjuntos.

Introduzco los conceptos clásicos de consecuencia, validez e independencia y la noción de modelo de un conjunto de fórmulas. Demuestro los teoremas de coincidencia y de sustitución.

Para cerrar este capítulo estudiamos el concepto de relación definible en un sistema.

III. COMPLETUD DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN

El tercer capítulo está dedicado a la demostración del teorema de completud. Introduzco un cálculo secuencial y demuestro los teoremas de corrección y de completud. Esta última, también para lenguajes supernumerables.

Este capítulo se puede saltar olímpicamente pues aunque en él demuestro compacidad y Löwenheim-Skolem, he vuelto a probar dichos teoremas, sin usar completud, en los capítulos correspondientes. El teorema de completud lo pruebo para fórmulas,

no sólo para sentencias, y la demostración es muy bonita: una modificación de la de Henkin-Hasenjaeger.

IV. NOCIONES BASICAS: TEORIA DE MODELOS

En este capítulo introduzco las primeras nociones de Teoría de Modelos propiamente dicha: una combinación de Algebra y Lógica. En particular, introduzco las relaciones entre sistemas que utilizan el lenguaje formal de primer orden como «medio de expresión»: equivalencia elemental, subsistema elemental e inmersión elemental. Veremos cómo se imbrican estos conceptos y estableceremos criterios útiles a la hora de demostrar que un determinado sistema es un subsistema elemental, o que está elementalmente inmerso en otro.

En Teoría de Modelos el juego es doble. Si contamos con una cierta realidad matemática como, por ejemplo, la clase de los sistemas que son grupos, definimos la teoría de esta clase; es decir, el conjunto de las sentencias del lenguaje apropiado que son verdaderas en todos los grupos. Si partimos de un conjunto de sentencias, entonces estudiamos la clase de todos los sistemas en los que las sentencias son verdaderas; es decir, definimos e investigamos las clases de sus modelos. En el primer caso, definimos TEO($\mathcal{K}$), siendo $\mathcal{K}$ una clase de sistemas, en el segundo definimos MOD(Σ), siendo Σ un conjunto de sentencias. Ambos conceptos son muy fructíferos en nuestro campo.

Un caso especial de lo anterior es cuando partiendo de un sistema $\mathscr{A}$, lo extendemos destacando en él a cada uno de los individuos de su universo. En el lenguaje adecuado al sistema extendido, cada individuo del universo tendrá un nombre y la teoría del sistema será particularmente detallada y minuciosa. Llamamos diagrama completo de $\mathscr{A}$ a la teoría del sistema extendido y diagrama abierto, o sencillamente diagrama, a las sentencias atómicas y a sus negaciones. De todas estas cuestiones se hablará en el capítulo IV.

V. EL TEOREMA DE COMPACIDAD Y SUS IMPLICACIONES MATEMATICAS

Dedico este capítulo a las consecuencias matemáticas del teorema de compacidad. Empiezo demostrando el teorema de compacidad por el procedimiento de los diagramas, sin usar los resultados del capítulo III, y defino el concepto de axiomatizabilidad de una propiedad, o de una clase de sistemas —como, por ejemplo, la clase de los sistemas que poseen una estructura matemática determinada—.

Demuestro que ciertas clases de sistemas son axiomatizables y, como consecuencia del teorema de compacidad, que otras no pueden serlo. Entre las primeras está la de los sistemas con estructura de Grupo y entre las segundas la de los buenos órdenes y la de los Sistemas de Peano. También construyo un modelo no estándar de los naturales: un modelo no isomorfo al de los naturales que aprendimos en la escuela primaria.

Finalizo este capítulo demostrando el teorema de Łoś y, a partir de él, el de compacidad. He querido construir un modelo por la técnica algebraica de los ultraproductos para que se conociera también este procedimiento. Como apéndice de

este capítulo están los teoremas sobre filtros necesarios para la introducción de ultraproductos. Toda esta parte es opcional, saltándosela no se pierde continuidad.

VI. LOS TEOREMAS DE LÖWENHEIM-SKOLEM Y SUS CONSECUENCIAS

En este capítulo demuestro las versiones potentes de Löwenheim-Skolem que establecen la multiplicidad de modelos existentes y, por ende, la incapacidad de caracterizar hasta isomorfía, en lógica de primer orden, a los sistemas matemáticos más comunes. En especial, en el apartado de modelos no estándar, estudiamos cómo son los modelos de la aritmética de Peano y construimos modelos no estándar de los reales: los modelos del Análisis no estándar.

Para finalizar: un tema que ha sido «víctima» de la investigación filosófica, la paradoja de Skolem. Expongo la paradoja y explico porqué no es una contradicción, señalando la diferencia existente entre «la realidad» —el Universo matemático— y los modelos. El lector interesado en la polémica puede empezar leyendo «Models and reality» de Putnam.

VII. TEORIAS COMPLETAS Y CATEGORICAS

Este último capítulo está dedicado al estudio de las teorías completas. Empezamos viendo que en primer orden no hay teorías categóricas con modelos infinitos y establecemos diversos test para determinar la completud de teorías. En especial, el test de Vaught, que utiliza el concepto de k-categoricidad, el de Robinson del modelo principal, para teorías modelo-completas, y también, en los casos aplicables, el de eliminación de cuantificadores.

Cierra este capítulo el apartado sobre el sistema $\mathcal{N}_S$, de los naturales con el cero y el siguiente, cuya teoría es completa.

APENDICE

Me he visto obligada a añadir un apéndice sobre cardinales y ordinales para que el libro pueda ser seguido por lectores que posean unos conocimientos mínimos de Teoría de Conjuntos.

Este libro, aparte de como texto de Teoría de Modelos, puede ser utilizado como texto de Lógica de primer orden, extrayendo de los tres primeros capítulos el material pertinente. Pensándolo como libro de texto, he incluido numerosos ejercicios y problemas en todos los capítulos.

Este libro fue concebido en la primavera del año 1984 con ocasión de las pruebas de idoneidad y desde entonces lo he escrito y vuelto a escribir hasta llegar a esta versión, que me ha parecido aceptable. Durante este tiempo he enseñado Teoría de

Modelos, utilizando alguna de las versiones de este texto en dos ocasiones; una para alumnos de tercero de Licenciatura y otra para alumnos de cuarto y quinto. Mi agradecimiento a todos ellos y especialmente a Roger, que confeccionó un índice analítico.

En este capítulo de agradecimientos quiero resaltar la ayuda prestada por la, bautizada por nosotras, «solidaridad femenina»: Julia mecanografió con pulcritud y paciencia el texto manuscrito, María y Antonia, alumnas de doctorado, leyeron el texto y confeccionaron el apéndice, Sandra mecanografió la bibliografía y todas ellas me han alentado en todo momento. Verdad es que también nos hemos divertido mucho.

A Jesús Mosterín le agradezco que accediera a escribir el prólogo y no sólo eso: él me introdujo en la Lógica cuando yo era su alumna, en los setenta, y desde entonces he permanecido en el Departamento que él dirige. Jesús ha participado activamente en todos mis proyectos y me ha enseñado mucho.

También agradezco a Leon Henkin el que fuera mi director durante mi estancia en Berkeley y que me introdujera, con sus enormes dotes pedagógicas y su clarividencia, de manera tan poco traumática en la Metamatemática y el Algebra.

Wilfrid Hodges, en el verano del año 1985, me acogió en el Queen Mary College y se leyó lo que entonces era este libro. A él le debo el que me corrigiera algunos errores, que me sugiriera cambios, que me indicara bibliografía y que me animara a añadir problemas y ejercicios.

También doy las gracias a John Tucker, que me aceptó en el Centre for Theoretical Computer Science de Leeds durante seis meses del 1986, por hacerme notar que el libro estaba ya acabado y por precipitarme en el relativo fragor de la Informática Teórica, que ahora me encandila.

Quiero terminar con algo más que agradecimiento a mi familia: Alfonso, con el que he compartido casi toda mi vida es el auténtico animador de mi trabajo. Pepe, mi hijo mayor, que me ha prometido una cena, en una pizzería, ¡naturalmente!, para cuando lo termine. Y Ulises, el chiquitín, que con su media lengua de dos años, me jalea con el slogan «libro no».

Y, por supuesto, doy las gracias a la Editorial Alianza por publicar este libro.

Barcelona, primavera de 1988
María MANZANO

GLOSARIO DE SIGNOS Y ABREVIATURAS

SIGNO	NOMBRE DEL SIGNO
$\varnothing$	conjunto vacío
$\mathbf{A} \in \mathbf{B}$ ($\mathbf{A} \notin \mathbf{B}$)	**A** pertenece a **B** (**A** no pertenece a **B**)
$\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ ($\bigcup \mathbf{A}$)	**A** unión **B** (gran unión de **A**)
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ ($\bigcap \mathbf{B}$)	**A** intersección **B** (gran intersección de **B**)
$\mathbf{A} - \mathbf{B}$	**A** menos **B**
$\mathbf{A} \triangle \mathbf{B}$	diferencia simétrica de **A** a **B**
$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ ($\mathbf{A} \not\subseteq \mathbf{B}$)	**A** está contenido en **B** (**A** no está contenido en **B**)
$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$	par desordenado
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	par ordenado
$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle$	*n*-tupla ordenada
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	producto cartesiano de **A** por **B**
$\mathbf{A}^n$	producto cartesiano de **A**, *n* veces
$\mathcal{P}\mathbf{A}$	partes (o potencia) de **A**
$\mathcal{C}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}$	complementario de **B** respecto de **A**
$\mathrm{Dom}(\mathbf{R})$	dominio de **R**
$\mathrm{Rec}(\mathbf{R})$	recorrido de **R**
$\check{\mathbf{R}}$	recíproca de **R**
$\mathbf{R} \mid \mathbf{A}$	restricción de **R** a **A**
$\mathbf{f} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$	función de **A** en **B**
$\mathbf{f}^{-1}$	inversa de **f**
$\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$	composición de **R** y **S**
$\mathbf{A}^{\mathbf{B}}$	conjunto de funciones de **B** en **A**
$\mathbf{f}[\mathbf{A}]$	imagen de **A** mediante **f**
$\mathbb{N}$	números naturales
$2\mathbb{N}$	números naturales pares

SIGNO	NOMBRE DEL SIGNO
$\mathbb{Z}$	números enteros
$\mathbb{Q}$	números racionales
$\mathbb{R}$	números reales
$\mathbb{C}$	números complejos
$\mathbb{Z}_n$	enteros módulo n
card(**A**)	cardinal de **A**
card(**A**) $\leqslant$ card(**B**)	**B** tiene al menos tantos elementos como **A**
$\aleph_0$	alef cero, primer cardinal infinito, card($\mathbb{N}$)
$\aleph_\alpha$	alef α
$\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_\alpha \rangle_{\alpha<\beta}$	enumeración
$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \ldots$	sistemas cualesquiera
$\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{f}_i \rangle_{i\in I}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j\in J} \rangle$	sistema
$\langle \mu, \delta \rangle$	tipo de un sistema
$\mathscr{G} = \langle \mathbf{G}, \mathbf{e}, \perp \rangle$	grupo
$\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{e}, \perp, \bullet \rangle$	anillo
$\mathscr{C} = \langle \mathbf{C}, \mathbf{e}, \mathbf{u}, \perp, \bullet \rangle$	cuerpo
$\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, {}^*, \blacktriangledown, \blacktriangle \rangle$	álgebra de Boole
$\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \leqslant \rangle$	orden
Sup(**B**)	supremo de **B**
Inf(**B**)	ínfimo de **B**
$\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$	$\mathscr{A}$ es un subsistema de $\mathscr{B}$
$\mathscr{A} \mid \mathbf{B}$	restricción de $\mathscr{A}$ al conjunto **B**
$\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$	expansión de $\mathscr{A}$ por enumeración
$\mathbf{h} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$	**h** es un homomorfismo de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$
$\mathbf{h}[\mathscr{A}]$	imagen homomórfica de $\mathscr{A}$ mediante **h**
$\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$ ($\mathscr{A} \not\cong \mathscr{B}$)	$\mathscr{A}$ es isomorfo a $\mathscr{B}$ ($\mathscr{A}$ no es isomorfo a $\mathscr{B}$)
$\mathscr{A} \overset{\mathbf{h}}{\cong} \mathscr{B}$	**h** es un isomorfismo de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$
$\mathscr{A} \,\tilde{\sqsubseteq}\, \mathscr{B}$ ($\mathscr{A} \,\tilde{\not\sqsubseteq}\, \mathscr{B}$)	$\mathscr{A}$ está inmerso en $\mathscr{B}$ ($\mathscr{A}$ no lo está en $\mathscr{B}$)
$\Pi_{i\in I}\mathscr{A}_i$	producto directo de $\langle \mathscr{A}_i \rangle_{i\in I}$
L	lenguaje
L($\mathscr{A}$)	lenguaje adecuado a $\mathscr{A}$
$\mathrm{L}_{\langle \mu, \delta \rangle}$	lenguaje de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$
$\neg$	negador
$\wedge$	conyuntor
$\vee$	disyuntor
$\rightarrow$	condicionador
$\leftrightarrow$	bicondicionador
$\forall$	cuantificador universal
$\exists$	cuantificador existencial
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varphi, \psi, \ldots$	metavariables para fórmulas
TER(L)	conjunto de los términos de L
FOR(L)	conjunto de las fórmulas de L
$\Gamma, \Delta, \Sigma, \ldots$	conjuntos de fórmulas
SEN(L)	conjunto de las sentencias de L

SIGNO	NOMBRE DEL SIGNO
$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{L}^*$	L^* es una expansión de L
$\mathrm{L} \cup \bar{c}$	expansión de L añadiendo constantes de $\bar{c}$
$\mathrm{LBR}(\varepsilon)$	conjunto de las variables libres en ε
$\mathrm{LBR}(\Gamma)$	variables libres en las fórmulas de Γ
$\varphi(x_1 \ldots x_n)$	$x_1, \ldots, x_n$ están libres en φ
$\varphi\langle x_1 \ldots x_n\rangle$	en φ están libres a lo sumo $x_1, \ldots, x_n$ y en ese orden
$\mathrm{LGD}(\varphi)$	conjunto de las variables ligadas en φ
$\mathcal{I}$	asignación
$\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x}$	asignación variante
$\mathcal{A}\mathcal{I}$	interpretación
$\mathcal{A}\mathcal{I}(\tau)$	denotación de τ en $\mathcal{A}$, $\mathcal{I}$
$\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat φ	la interpretación $\mathcal{A}\mathcal{I}$ satisface φ
$\mathrm{MOD}(\Sigma)$	clase de los modelos de Σ
$\mathcal{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$	sistema $\mathcal{A}$ con parámetros $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$
$\Gamma \vDash \varphi$	φ es consecuencia de Γ
$\Gamma \nvDash \varphi$	φ es independiente de Γ
$\vDash \varphi$	φ es válida
$\mathbf{S}^{\tau}_{x}\,\varepsilon$	sustitución de x por τ en ε
$\mathbf{S}^{\tau_1 \ldots \tau_n}_{x_1 \ldots x_n}$	sustitución simultánea
$\varphi(c)$	sustitución de x por c en $\varphi(x)$
$\exists^1 x\, \varphi$	hay un único x tal que φ
$\varphi_{\mathbf{R}}$	fórmula que define a **R**
$\varphi_{\mathbf{f}}$	fórmula que define a **f**
φ_n	hay al menos n elementos
ψ_n	hay a lo sumo n elementos
$\bigwedge_{\varphi\in\Gamma}\varphi$	conyunción repetida
$\bigvee_{\varphi\in\Gamma}\varphi$	disyunción repetida
$\mathrm{CON}(\Delta)$	consecuencias de Δ
$\mathrm{TEO}(\mathcal{K})$	teoría de la clase $\mathcal{K}$
$\mathrm{TEO}(\mathcal{A})$	teoría del sistema $\mathcal{A}$
$\mathrm{MOD}(\Sigma)$	clase de los modelos de Σ
$\mathrm{TEO}(\langle\mathcal{A}, \mathbf{a}\rangle)$	diagrama completo de $\mathcal{A}$
$\mathrm{DIAG}(\mathcal{A})$	diagrama abierto de $\mathcal{A}$
$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \not\equiv \mathcal{B}$)	$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son elementalmente equivalentes (no lo son)
$\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \nprec \mathcal{B}$)	$\mathcal{A}$ es subsistema elemental de $\mathcal{B}$ (no lo es)
$\mathcal{A} \precsim \mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \not\precsim \mathcal{B}$)	$\mathcal{A}$ está elementalmente inmerso en $\mathcal{B}$ (no lo está)
$\vdash \Gamma\varphi$	la secuencia $\Gamma\varphi$ es derivable
$\Gamma \vdash \varphi$ ($\Gamma \nvdash \varphi$)	φ es derivable a partir de Γ (φ no es derivable a partir de Γ)
$\vdash\varphi$	φ es un teorema lógico
IH	regla de introducción de hipótesis
M	— monotonía
PC	— prueba por casos

SIGNO	NOMBRE DEL SIGNO
NC	— no contradicción
IDA	— introducción del disyuntor en el antecedente
IDC	— introducción del disyuntor en la conclusión
IPA	— introducción del particularizador en el antecedente
IPC	— introducción del particularizador en la conclusión
RI	— reflexividad de la identidad
SI	regla de sustitución de iguales
SNC	segunda regla de no contradicción
T	regla de transitividad
MP	— del «modus ponens»
MT	— del «modus tollens»
C_p	reglas de contraposición
ED	— eliminación del disyuntor
TND	— tertium non datur
IC	— introducción del conyuntor
DN	— doble negación
EG	—eliminación del generalizador
IGC	— introducción del generalizador en la conclusión
IGA	— introducción del generalizador en el antecedente
$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \cdot \rangle$	sistema estándar de los naturales
$L(\mathcal{N})$	lenguaje de la aritmética
AP	Aritmética de Peano
$\mathcal{N}_S = \langle \mathbb{N}, 0, S \rangle$	naturales con cero y siguiente
$\mathbb{N}(\mathcal{M})$	números naturales estándar en $\mathcal{M}$
$\mathcal{U} = \langle \mathcal{V}, \epsilon \rangle$	Universo matemático (no es un sistema)
EXT	axioma de extensionalidad
PAR	axioma del par
GUN	axioma de la gran unión
POT	axioma del conjunto potencia
SEP	axioma de separación
INF	axioma de infinitud
AE	axioma de extensionalidad
REG	axioma de regularidad
REE	axioma de reemplazo
[Grup.]	clase de los grupos
α_G	axioma de los grupos
[Grup. Com.]	clase de los grupos conmutativos
α_{GC}	axioma de los grupos conmutativos
[Anill.]	clase de los anillos
α_A	axioma de los anillos
[Anill. Com.]	clase de los anillos conmutativos
α_{AC}	axioma de los anillos conmutativos
[Cuerp.]	clase de los cuerpos
α_C	axioma de los cuerpos

SIGNO	NOMBRE DEL SIGNO
[Cuerp. Carc. *p*]	clase de los cuerpos de característica *p*
α_{CCP}	axioma de los cuerpos de característica *p*
[Cuerp. Carac. 0]	clase de los cuerpos de característica 0
[Ord. Par.]	clase de los órdenes parciales
β_{OP}	axioma de los órdenes parciales
[Ord. Lin.]	clase de los órdens lineales
β_{OL}	axioma de los órdenes lineales
[Buen Ord.]	clase de los buenos órdenes
[Equiv.]	clase de las relaciones de equivalencia
[Ord. Acot.]	clase de los órdenes acotados
[Ord. Dis. Acot.]	clase de los órdenes discretos acotados
[Alg. Boole]	clase de las álgebras de Boole
[Alg. Boole. *sin átomos*]	clase de las álgebras de Boole sin átomos
[Cuerp. Alg. Cerr.]	clase de los cuerpos algebráicamente cerrados
■	fin de demostración
□	fin de definición

Capítulo I
NOCIONES BASICAS: ALGEBRA UNIVERSAL

INTRODUCCION

Empezamos introduciendo la noción de sistema, definiéndolos como un triplete formado por un conjunto no vacío, llamado universo, y una serie de relaciones y funciones definidas sobre el universo del sistema. Algunos de estos sistemas tienen estructuras conocidas y estudiadas en matemáticas; por ejemplo, son grupos, anillos, órdenes o sistemas de Peano.

Una vez introducidos los sistemas, podemos, si así lo deseamos, estudiarlos sin utilizar el lenguaje formal de primer orden. Estaremos entonces en el área conocida como Algebra Universal. Aquí se estudian los sistemas y ciertas relaciones entre ellos, tales como la de subsistema, extensión, homomorfismo y todas sus especificaciones; entre ellas, isomorfismo e inmersión. La línea divisoria entre Algebra Universal y Teoría de Modelos es difusa. Como dicen Chang y Keisler en su libro *Model Theory*, Algebra Universal + Lógica = Teoría de Modelos.

1. SISTEMAS

Para referirnos a sistemas utilizaremos letras mayúsculas diferenciadas: $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{D}$, ...

1.1. Definición

$\mathcal{A}$ es un sistema syss $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{f}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j \in J} \rangle$ con dos funciones asociadas $\mu: I \to \mathbb{N}$ y $\delta: J \to \mathbb{N} - \{0\}$ tal que:

1) $\mathbf{A} \neq \varnothing$ es el universo o ámbito del sistema.

2) $\mathbf{I}$ es un conjunto, que puede ser $\varnothing$, de índices.
Para cada $i \in \mathbf{I}$, $\mu(i) \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{f}_i$ es una función $\mu(i)$-aria definida sobre $\mathbf{A}$; es decir, $\mathbf{f}_i: \mathbf{A}^{\mu(i)} \to \mathbf{A}$.
Cuando $\mu(i) = 0$, $\mathbf{f}_i$ es un elemento destacado de $\mathbf{A}$. Es decir, $\mathbf{f}_i: \{\varnothing\} \to \mathbf{A}$. Y puesto que el dominio de la función es una clase unitaria, podemos identificar a ésta con su recorrido.

3) $\mathbf{J}$ es un conjunto de índices, que también puede ser $\varnothing$.
Para cada $j \in \mathbf{J}$, $\delta(j) \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $\mathbf{R}_j$ es una relación $\delta(j)$-aria definida sobre $\mathbf{A}$; es decir, $\mathbf{R}_j \subseteq \mathbf{A}^{\delta(j)}$.

El tipo o signatura de $\mathscr{A}$ es $\langle \mu; \delta \rangle$. □

La cardinalidad del sistema $\mathscr{A}$ se define como la cardinalidad de su universo $\mathbf{A}$. En principio, no podemos ninguna restricción, pudiendo un sistema tener cualquier cardinalidad finita o infinita. Bueno, sí que ponemos una: de la definición de sistema se sigue que éstos no pueden tener cardinalidad cero.

Es conveniente, aunque no necesario, que las relaciones y funciones de $\mathscr{A}$ estén ordenadas: cero-arias, monarias, binarias, ... Para ello pediremos a μ y a δ que sean crecientes; es decir, si $i, k \in \mathbf{I}$ y $i \leq k$, entonces $\mu(i) \leq \mu(k)$.

Caso de ser finitos $\mathbf{I}$ y $\mathbf{J}$ podemos explicitar las funciones y relaciones de $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n; \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_m \rangle.$$

Cuando $\mathscr{A}$ sólo tiene relaciones, decimos que es un sistema relacional, cuando sólo tiene funciones, que es un álgebra. De hecho, como toda función n-aria es una relación $n + 1$-aria podríamos utilizar siempre sistemas relaciones.

Concretamente, $\mathbf{f}_i$ de grado $\mu(i)$ se convierte en $\mathbf{R}$ dada por

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)+1} \rangle \in \mathbf{R} \text{ syss } \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)}) = \mathbf{x}_{\mu(i)+1}$$

Otras presentaciones posibles de los sistemas.

1) $\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{c}_k \rangle_{k \in K}, \langle \mathbf{f}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j \in J} \rangle$. Destacando los individuos aparte de las funciones.

2) $\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{c}_k \rangle_{k \in K}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j \in J} \rangle$. Con sólo individuos destacados y relaciones.

1.2. Definición

Dado un sistema $\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{f}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j \in J} \rangle$ su tipo es $\langle \mu, \delta \rangle$. □

1.3. Definición

Decimos que dos sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son similares si tienen el mismo tipo. □

NOTA

Todos los sistemas que consideramos contienen la identidad como relación binaria, aunque explícitamente no lo expresemos.

Ejemplos

1) El triplo $\mathcal{E} = \langle \mathbf{E}, \varnothing, \mathbf{E} \rangle$ es un sistema formado por un conjunto **E** no vacío y dos relaciones monarias, el conjunto $\varnothing$ y todo **E**. Dicho sistema tiene tipo $\langle \varnothing; 1,1 \rangle$.

2) El sistema $\mathcal{N}_S = \langle \mathbb{N}, 0, \mathbf{S} \rangle$ donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los naturales, 0 es el número cero y **S** es la función del siguiente, tiene tipo $\langle 0,1; \varnothing \rangle$.

3) El sistema $\langle \mathcal{P}\mathbf{A}, \varnothing, \mathbf{A}, \mathcal{C}_{\mathbf{A}}, \cup, \cap, \varnothing, \subseteq \rangle$ formado por el conjunto de las partes de **A** como universo, $\varnothing$ y **A** como individuos destacados de $\mathcal{P}\mathbf{A}$, el complementario respecto de **A** como función monaria, $\cup$ e $\cap$ como funciones binarias, $\varnothing$ como relación monaria y la relación binaria de «ser un subconjunto de», es un sistema de tipo $\langle 0,0,1,2,2; 1,2 \rangle$.

4) El sistema $\langle \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}, \mathbf{V}, \mathbf{F}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \rangle$, donde los conectores funcionan del modo habitual, es un sistema de tipo $\langle 0,0,1,2,2,2,2; \varnothing \rangle$.

5) El sistema $\langle \{0\}, 0, \mathbf{f}: \langle 0,0 \rangle \rightarrow 0, \{\langle 0,0,0 \rangle\} \rangle$ *es de tipo* $\langle 0,2; 3 \rangle$.

6) El sistema $\langle \mathbb{Q}, 0, < \rangle$ *formado por los racionales, el cero y la relación de orden, es un sistema de tipo* $\langle 0; 2 \rangle$.

7) $\langle \mathbb{Z}_5, \bar{0}, \bar{+}, \bar{\cdot} \rangle$ *formado por los enteros módulo 5, la clase del cero como individuo destacado, la suma y el producto habituales en dicho conjunto, es un sistema de tipo* $\langle 0,2,2; \varnothing \rangle$.

Los elementos de $\mathbb{Z}_5$, *llamados clases de restos, son las clases de equivalencia obtenidas mediante la siguiente relación:* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (mod. 5) syss existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathbf{x} - \mathbf{y} = k.5$ (o, lo que es lo mismo, al dividir **x** e **y** por 5 dan el mismo resto).

Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}$, sea $\bar{\mathbf{x}}$ su clase de equivalencia mediante la relación anterior y sea $\mathbb{Z}_5$ el conjunto de todas estas clases; es decir, $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

En $\mathbb{Z}_5$ definimos la suma y el producto de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{x}} \mathbin{\bar{+}} \bar{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x} + \mathbf{y}}$$

$$\bar{\mathbf{x}} \mathbin{\bar{\cdot}} \bar{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x} + \mathbf{y}}$$

Obtenemos de esta forma los valores expuestos en las tablas.

$\bar{+}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$\bar{\cdot}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

2. ALGUNOS SISTEMAS CON ESTRUCTURAS CONOCIDAS

2.1. Grupo

El sistema $\mathscr{G} = \langle G, e, \perp \rangle$ de tipo $\langle 0,2; \varnothing \rangle$ tiene la estructura de grupo syss:

i) Para cada $x, y, z \in G$: $x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \perp z$. Es decir, la operación $\perp$ es asociativa.

ii) Para cada $x \in G$: $x \perp e = e \perp x = x$. Es decir, e es el elemento neutro.

iii) Para cada $x \in G$ hay un $y \in G$ tal que $x \perp y = e$. Es decir, cada elemento de G tiene simétrico. □

Si también cumple

iv) Para cada $x, y \in G$: $x \perp y = y \perp x$, decimos que $\mathscr{G}$ es un grupo conmutativo. □

NOTA

Una manera alternativa de definir la estructura de grupo es la siguiente:

$$\mathscr{G} = \langle G, e, ^{-1}, \perp \rangle \text{ de tipo } \langle 0, 1, 2; \varnothing \rangle,$$

tiene la estructura de grupo syss:

i)' $\perp$ es asociativa

ii)' e es elemento neutro

iii)' Para cada $x \in G$: $x \perp x^{-1} = e$ □

El incluir la función monaria $^{-1}$, que a cada elemento del grupo le asigna su simétrico, entre las funciones destacadas del sistema tiene ciertas ventajas que apreciaréis al solucionar el problema 2.

Las dos definiciones de grupo que hemos dado son equivalentes en el sentido siguiente: si tenemos un grupo definido de la primera manera, basta con destacar en el

sistema la función que a cada elemento de G le asigna su simétrico y obtenemos un grupo que se acomoda a la definición segunda. En el sentido contrario, al eliminar del sistema dicha función, el nuevo sistema verifica las condiciones de la primera definición.

Ejemplos

1) El sistema $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ formado por los enteros, el cero y la suma es un grupo.

2) $\langle \mathcal{P}\mathbf{A}, \varnothing, \triangle \rangle$ donde $\triangle$ es la diferencia simétrica de conjuntos; es decir,

$$\mathbf{x} \triangle \mathbf{y} = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cup (\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

también tiene estructura de grupo.

3) $\langle \mathbb{Z}_5, \bar{0}, \bar{+} \rangle$ es también un grupo.

NOTA

Si tomamos como definición de grupo la segunda:

1) El grupo del ejemplo 1 será $\langle \mathbb{Z}, 0, ^{-}, + \rangle$, siendo $^{-}$ la función que a cada entero $\mathbf{x}$ lo manda a $(-\mathbf{x})$.

2) El grupo del ejemplo 2 será $\langle \mathcal{P}\mathbf{A}, \varnothing, \mathbf{I}, \triangle \rangle$ siendo $\mathbf{I}$ la función identidad, pues el simétrico de $\mathbf{x}$ es él mismo.

3) El grupo del ejemplo 3 será $\langle \mathbb{Z}_5, \bar{0}, ^{*}, \bar{+} \rangle$, siendo * la función

$$\{\langle \bar{0}, \bar{0} \rangle, \langle \bar{1}, \bar{4} \rangle, \langle \bar{2}, \bar{3} \rangle, \langle \bar{3}, \bar{2} \rangle, \langle \bar{4}, \bar{1} \rangle\}.$$

2.2. Anillos y cuerpos

2.2.1. *Anillo*

El sistema $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{e}, \perp, \bullet \rangle$ de tipo $\langle 0, 2, 2; \varnothing \rangle$ tiene la estructura de anillo syss:

i) $\langle \mathbf{A}, \mathbf{e}, \perp \rangle$ es un grupo conmutativo.

ii) Para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}) \bullet \mathbf{z} = \mathbf{x} \bullet (\mathbf{y} \bullet \mathbf{z})$.

iii) Para cada $\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $\mathbf{x} \bullet (\mathbf{y} \perp \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}) \perp (\mathbf{x} \bullet \mathbf{z})$, $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y}) \bullet \mathbf{z} = (\mathbf{x} \bullet \mathbf{z}) \perp (\mathbf{y} \bullet \mathbf{z})$. □

Si además cumple

iv) Existe un $\mathbf{u} \in \mathbf{A}$ tal que para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$: $\mathbf{x} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{x}$, decimos que $\mathcal{A}$ es un anillo con elemento unidad. □

Y si cumple

v) Para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{A}$: $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{y} \bullet \mathbf{x}$, decimos que $\mathscr{A}$ es un anillo conmutativo. □

2.2.2. *Cuerpo*

El sistema $\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{e}, \mathbf{u}, \perp, \bullet \rangle$ de tipo $\langle 0, 0, 2, 2; \varnothing \rangle$ tiene estructura de cuerpo syss:

i) $\langle \mathbf{A}, \mathbf{e}, \perp, \bullet \rangle$ es un anillo conmutativo.

ii) Para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$: $\mathbf{u} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{x} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{x}$. Es decir, $\mathbf{u}$ es el elemento unidad para la operación $\bullet$.

iii) Para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{A}$: si $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{e}$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{e}$ ó $\mathbf{y} = \mathbf{e}$. Es decir, no tiene divisores de cero.

iv) $\mathbf{e} \neq \mathbf{u}$. El elemento neutro y el elemento unidad son distintos.

v) Para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$: si $\mathbf{x} \neq \mathbf{e}$, entonces existe un $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathbf{y} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{u}$. Es decir, hay inverso para la operación $\bullet$. □

Dado un número primo p, si se cumple además que

vi) $p\mathbf{u} = \mathbf{e}$ (donde $p\mathbf{u}$ es una abreviatura de $\mathbf{u} + \overset{p}{\ldots} + \mathbf{u}$), tendremos un cuerpo de característica p. □

Cuando en vez de la condición vi) se verifica

vii) $q\mathbf{u} \neq \mathbf{e}$ para cada número primo q, decimos que se trata de un cuerpo de característica cero. □

Introduzcamos ahora la abreviatura $\mathbf{x}^n$ para $\mathbf{x} \bullet (\mathbf{x} \bullet (\mathbf{x} \ldots \mathbf{x})\ldots)$, n veces. Cuando un cuerpo verifica además la condición

viii) Para cada $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$ hay un $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$ tal que

$$(\mathbf{x}_n \bullet \mathbf{y}^n) \perp (\mathbf{x}_{n-1} \bullet \mathbf{y}^{n-1}) \perp \ldots \perp (\mathbf{x}_1 \bullet \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}_0 = \mathbf{e} \text{ o } \mathbf{x}_n = \mathbf{e}$$

para cada natural n distinto del cero, decimos que $\mathscr{A}$ es un cuerpo algebráicamente cerrado. Esta condición viii) lo que expresa es que cada polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbf{A}$ tiene una raíz. □

Ejemplos

1) $\langle \mathbb{Z}, 0, +, \cdot \rangle$ es un anillo con elemento unidad.

2) $\langle \{0\}, 0, \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$, donde $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son ambas la única función binaria posible sobre $\{0\}$, es un anillo. Hay otras posibles presentaciones de los anillos en las que se exige que en el universo haya al menos dos elementos.

3) $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f_c, \oplus, \odot \rangle$ donde $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es el conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$; es decir, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f / f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, es también un anillo. f_c es la función constante de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que manda a todos los elementos al 0. $\oplus$, $\odot$ son funciones binarias de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definidas así:

$$\begin{aligned}
\oplus : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\
\langle f, g \rangle &\to f \oplus g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad x \to f(x) + g(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\odot : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\
\langle f, g \rangle &\to f \odot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&\qquad\qquad x \to f(x) \cdot g(x)
\end{aligned}$$

Aquí $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, $+$ y $\cdot$ son su suma y producto.

4) $\langle \mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot \rangle$, los racionales con su suma y producto son un cuerpo. Este cuerpo no está algebraicamente cerrado.

5) $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot \rangle$, los reales con su suma y producto, son un cuerpo que tampoco está algebraicamente cerrado.

6) $\langle \mathbb{Z}_p, \bar{0}, \bar{1}, \bar{+}, \bar{\cdot} \rangle$, los enteros módulo p, con p primo, es otro cuerpo que no está algebraicamente cerrado y cuya característica es p. De los ejemplos que he puesto es el único que no tiene característica cero.

7) $\langle \mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot \rangle$, los complejos con su suma y producto, constituyen nuestro primer ejemplo de cuerpo algebraicamente cerrado.

NOTA

No incluyo en este apartado, por carecer de ejemplos intuitivos y sencillos, otras estructuras de cuerpo tales como la de los cuerpo real-cerrados.

2.3. Orden

El sistema $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ de tipo $\langle \varnothing; 2 \rangle$ es un orden parcial (o, simplemente, un orden) syss

i) Para cada $x \in \mathbf{A}$: $\langle x, x \rangle \in \mathbf{R}$. Es decir, $\mathbf{R}$ es reflexiva.

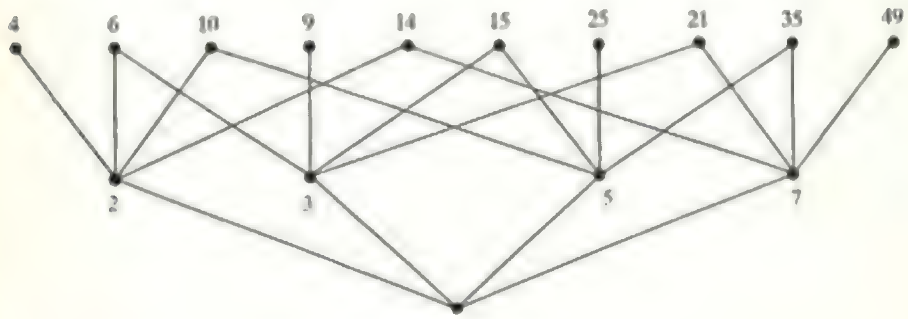
ii) Para cada $x, y \in \mathbf{A}$: si $\langle x, y \rangle \in \mathbf{R}$ y $\langle y, x \rangle \in \mathbf{R}$ entonces $x = y$. Siendo, por tanto, antisimétrica.

iii) Para cada $x, y, z \in \mathbf{A}$: si $\langle x, y \rangle \in \mathbf{R}$ y $\langle y, z \rangle \in \mathbf{R}$ entonces $\langle x, z \rangle \in \mathbf{R}$. Es decir, $\mathbf{R}$ es transitiva. □

2) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ es un orden lineal. El adjetivo lineal le viene precisamente de su aspecto de línea. Una parte de su diagrama infinito sería:

Este sistema constituye un ejemplo de orden con extremo inferior pero sin extremo superior. Evidentemente el orden no es denso, pues entre dos naturales cualesquiera no siempre hay otro número natural.

3) $\langle \mathbb{N}, / \rangle$ donde / es la relación sobre $\mathbb{N}$ definida mediante: **m/n** syss **m** divide a **n**, es un orden parcial. Una parte de su diagrama infinito aparece representada en el diagrama:



4) $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, los racionales con su orden constituyen un ejemplo de sistema con estructura de orden lineal denso y sin extremos.

5) $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, los reales con su orden son un ejemplo de orden lineal denso, sin extremos.

2.3.1. *Cadena, cota, supremo e ínfimo*

Sea $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ un orden parcial:

1) $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ es una cadena en $\mathbf{A}$ syss $\langle \mathbf{B}, \mathbf{R} \cap \mathbf{B}^2 \rangle$ es un orden lineal. □

2) Si $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ es una cota superior de $\mathbf{B}$ syss para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \in \mathbf{R}$. □

3) Si $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{b} \in \mathbf{A}$ es una cota inferior de $\mathbf{B}$ syss para todo $\mathbf{y} \in \mathbf{B}$: $\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbf{R}$. □

4) Si $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ es el supremo de $\mathbf{B}$ syss es una cota superior de $\mathbf{B}$ y para todo $\mathbf{z}$, si $\mathbf{z}$ es una cota superior de $\mathbf{B}$, entonces $\langle \mathbf{a}, \mathbf{z} \rangle \in \mathbf{R}$. Es decir, es la menor de las cotas superiores de $\mathbf{B}$. Si el supremo de $\mathbf{B}$ existe lo denotamos Sup ($\mathbf{B}$). □

5) Si $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{b} \in \mathbf{A}$ es el ínfimo de $\mathbf{B}$ syss es una cota inferior de $\mathbf{B}$ y para todo $\mathbf{z}$, si $\mathbf{z}$ es una cota inferior de $\mathbf{B}$, entonces $\langle \mathbf{z}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbf{R}$. Es decir, es la mayor de las cotas inferiores. Si el ínfimo de $\mathbf{B}$ existe, lo denotamos Inf($\mathbf{B}$). □

6) Si $\mathbf{A}$ mismo tiene cota superior, ésta es única y la llamamos elemento máximo de $\mathbf{A}$. □

7) Si el propio $\mathbf{A}$ tiene cota inferior, ésta es única y la llamamos elemento mínimo de $\mathbf{A}$. □

2.4. Buen orden

El sistema $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ de tipo $\langle \varnothing; 2 \rangle$ es un buen orden syss:

i) $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ es un orden lineal.

ii) Cada subconjunto no vacío de $\mathbf{A}$ tiene elemento mínimo. Es decir, para cada $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{A}$, $\mathbf{X} \neq \varnothing$, existe un $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ tal que para cada elemento $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$ se cumple $\langle \mathbf{z}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbf{R}$. □

Ejemplos

1) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ es un buen orden.

2) Sin embargo $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ no es un buen orden pues $\mathbb{Z}$, que es un subconjunto de $\mathbb{Z}$, no tiene primer elemento respecto de dicho orden. No obstante, sabemos por el teorema del Buen Orden —equivalente al axioma de elección— que todo conjunto no

vacío admite un buen orden. No hay ningún problema, seguro que ese buen orden no es el habitual $\leq$.

2.5. Sistema de Peano

El sistema $\langle A, a, f\rangle$, de tipo $\langle 0, 1; \varnothing\rangle$, es un sistema de Peano syss:

i) $a \notin Rec(f)$. Es decir, a no es la imagen mediante f de ningún elemento de A.

ii) Para cada $x, y \in A$: si $x \neq y$ entonces $f(x) \neq f(y)$. Es decir, la función f es inyectiva.

iii) Cada subconjunto de A que contenga el a y que esté cerrado por la función f, es todo A. □

Ejemplos

1) El sistema $\langle \mathbb{N}, 0, S\rangle$ formado por los naturales, el cero y la función del siguiente, es un sistema de Peano.

2) El sistema $\langle 2\mathbb{N}, 0, S'\rangle$ donde $2\mathbb{N}$ es el conjunto de los naturales pares, 0 es el cero y S' es la función que consiste en sumar dos, es también un sistema de Peano.

2.6. Algebras de Boole

El sistema $\langle A, a, b, ^*, \blacktriangledown, \blacktriangle\rangle$ de tipo $\langle 0,0,1,2,2; \varnothing\rangle$ tiene estructura de álgebra de Boole syss:

i) Para cada $x, y, z \in A$: $x \blacktriangledown (y \blacktriangledown z) = (x \blacktriangledown y) \blacktriangledown z$. También la operación $\blacktriangle$ es asociativa.

ii) Para cada $x, y \in A$: $x \blacktriangledown y = y \blacktriangledown x$. También la operación $\blacktriangle$ es conmutativa.

iii) Para cada $x \in A$: $x \blacktriangledown x = x$ y $x \blacktriangle x = x$. Es decir, cumplen la ley de idempotencia.

iv) Para cada $x, y, z \in A$: $x \blacktriangledown (y \blacktriangle z) = (x \blacktriangledown y) \blacktriangle (x \blacktriangledown z)$. También vale esta ley de distributividad cambiando $\blacktriangledown$ por $\blacktriangle$.

v) Para cada $x \in A$: $x \blacktriangledown (x \blacktriangle y) = x$ y $x \blacktriangle (x \blacktriangledown y) = x$. Estas son las leyes de absorción.

vi) Para cada $x, y \in A$: $(x \blacktriangledown y)^* = x^* \blacktriangle y^*$. De forma similar, cambiando $\blacktriangle$ por $\blacktriangledown$, se verifican las otras leyes de De Morgan.

vii) Para cada $x \in A$:

$$x \blacktriangledown a = x,\ x \blacktriangle a = a$$

$$x \blacktriangledown b = b,\ x \blacktriangle b = x,\ a \neq b \text{ y } x \blacktriangledown x^* = b$$

Estas son las leyes que gobiernan al **a** y al **b**.

viii) Para cada $x \in A$: $(x^*)^* = x$. Esta es la ley de la doble negación. □

Ejemplos

1) El sistema $\langle \mathscr{P}A, \varnothing, A, \mathscr{C}_A, \cup, \cap \rangle$ formado por las partes de un conjunto A no vacío como universo, y las operaciones habituales de conjuntos, es un álgebra de Boole.

2) Se denomina álgebra de conjuntos a todo subconjunto de $\mathscr{P}X$ —siendo **X** un conjunto no vacío— al que pertenezcan $\varnothing$ y **X** y además esté cerrado bajo unión, intersección y paso al complementario. Se puede demostrar no sólo que toda álgebra de conjuntos es un álgebra de Boole, sino que «en el fondo» toda álgebra de Boole es un álgebra de conjuntos.

3) Otro ejemplo típico de álgebra de Boole son las denominadas álgebras de Lindenbaum. Sea L un lenguaje de primer orden y consideremos la relación de equivalencia, $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, entre fórmulas de L. Sea **B** el conjunto formado por las clases de equivalencia.
$\langle \mathbf{B}, \mathbf{V}, \mathbf{F}, \bar{\neg}, \bar{\vee}, \bar{\wedge} \rangle$ es un álgebra de Boole, aquí $\bar{\neg}$, $\bar{\vee}$ y $\bar{\wedge}$ denotan las operaciones obtenidas en el conjunto cociente.
Concretamente,

$$[\varphi] = \{\psi / \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$$

$$\mathbf{B} = \{[\varphi] / \varphi \text{ es una fórmula de L}\}$$

$$\mathbf{V} = [\varphi \vee \neg \varphi] \qquad \mathbf{F} = [\varphi \wedge \neg \varphi]$$

$$[\varphi]\ \bar{\vee}\ [\psi] = [\varphi \vee \psi] \qquad [\varphi]\ \bar{\wedge}\ [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$$

4) Sea **m** un número entero mayor que 1 y sea $A = \{x \in \mathbb{Z} / x / m\}$. Definamos las operaciones $\blacktriangledown$ y $\blacktriangle$ de la siguiente manera: para cada $x, y \in A$: $x \blacktriangledown y = \text{m.c.m.}(x, y)$ (el mínimo común múltiplo de x e y), mientras que $x \blacktriangle y = \text{m.c.d.}(x, y)$ (el máximo común divisor de x e y).

Y definamos $x^* = \dfrac{m}{x}$.

El sistema $\langle A, 1, m, {}^*, \blacktriangledown, \blacktriangle \rangle$ es un álgebra de Boole.

2.6.1. *Atomos de un álgebra de Boole*

Un átomo de un álgebra de Boole es un elemento $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ tal que no hay ningún elemento $\mathbf{y}$ que esté entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{x}$; es decir, tal que $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{y} \leqslant \mathbf{x}$ siendo $\mathbf{a} \neq \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. El orden de un álgebra de Boole se define diciendo:

$$\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y} \text{ syss } \mathbf{x} \blacktriangledown \mathbf{y} = \mathbf{y}$$

Un álgebra de Boole es atómica si para cada $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ hay un átomo $\mathbf{z}$ menor que él. Es decir,

ix) Para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$: si $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ entonces existe un $\mathbf{z}$ tal que $\mathbf{a} \neq \mathbf{z} \leqslant \mathbf{x}$ y para cada $\mathbf{v}$:

$$\text{si } \mathbf{v} \leqslant \mathbf{z} \text{ entonces } \mathbf{v} = \mathbf{a} \text{ o } \mathbf{v} = \mathbf{z}. \; \square$$

Un álgebra de Boole carece de átomos si se verifica:

x) No hay ningún $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ y para cada $\mathbf{z}$:

$$\text{si } \mathbf{z} \leqslant \mathbf{x} \text{ entonces } \mathbf{z} = \mathbf{a} \text{ o } \mathbf{z} = \mathbf{x}. \; \square$$

2.7. Anillos de Boole

Sea $\langle \mathbf{A}, \mathbf{e}, \mathbf{u}, \perp, \bullet \rangle$ un sistema de tipo $\langle 0,0,2,2; \varnothing \rangle$. Decimos que es un anillo de Boole syss:

i) $\langle \mathbf{A}, \mathbf{e}, \perp, \bullet \rangle$ es un anillo conmutativo con elemento unidad, $\mathbf{u}$.

ii) Para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$: $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}$. Es decir, cada elemento es idempotente. $\square$

Ejemplos

1) Sea $\mathbf{A} = \{0, 1\}$ y definamos las operaciones $\perp$ y $\bullet$ así:

$$0 \perp 0 = 0 \bullet 0 = 0 \bullet 1 = 1 \bullet 0 = 0$$

$$0 \perp 1 = 1 \perp 0 = 1 \bullet 1 = 1$$

$\langle \mathbf{A}, 0, 1, \perp, \bullet \rangle$ es un anillo de Boole.

2) Sea $\mathbf{B}$ un conjunto cualquiera. Denotamos mediante $2^{\mathbf{B}}$ al conjunto de las funciones características sobre $\mathbf{B}$; es decir,

$$2^{\mathbf{B}} = \{\mathbf{f} \,/\, \mathbf{f}: \mathbf{B} \rightarrow 2\} \text{ (entender 2 como } \{0, 1\})$$

Definamos $\textcircled{$\perp$}$, $\odot$:

$$(f \textcircled{$\perp$} g)(x) = f(x) \perp g(x)$$
$$(f \odot g)(x) = f(x) \bullet g(x)$$

donde $\perp$ y $\bullet$ son las operaciones del ejemplo anterior.

Y sea

$\mathbf{a}$: B $\to$ 2, la función constantes de valor 0

$\mathbf{b}$: B $\to$ 2, la función constante de valor 1.

Es fácil comprobar que $\langle 2^B, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \textcircled{$\perp$}, \odot \rangle$ es un anillo de Boole.

NOTA

A estas estructuras se las denomina Anillos de Boole porque están íntimamente relacionadas con las álgebras de Boole: siempre que tengamos un anillo podemos definir un álgebra y viceversa. La transformación se hace conforme al siguiente esquema:

Anillo de Boole $\longrightarrow$ Algebra de Boole:

$$\boxed{\begin{array}{l} x \blacktriangle y = x \bullet y \\ x \blacktriangledown y = x \perp y \perp (x \bullet y) \\ \quad x^* = u \perp x \end{array}}$$

Algebra de Boole $\longrightarrow$ Anillo de Boole:

$$\boxed{\begin{array}{l} x \perp y = (x \blacktriangle y^*) \blacktriangledown (x^* \blacktriangle y) \\ x \bullet y = x \blacktriangle y \end{array}}$$

2.8. Retículos

Sea $\langle A, \leqslant \rangle$ un sistema de tipo $\langle \varnothing; 2 \rangle$. Decimos que es un retículo syss.

i) $\langle A, \leqslant \rangle$ es un orden (basta con que sea parcial).

ii) Para cada $x, y \in A$: existe Sup $(\{x, y\})$ y también Inf $(\{x, y\})$.

Notación

En vez de Sup $(\{x, y\})$ pondremos $x \blacktriangledown y$, pues existe el supremo. Y en vez de Inf $(\{x, y\})$ pondremos $x \blacktriangle y$.

Cuando en un retículo se verifica además:

iii) Hay un elemento máximo, $\mathbf{b}$, y uno mínimo, $\mathbf{a}$ y se cumple que para cada $x \in A$ hay un $z \in A$ tal que

$$x \blacktriangledown z = \mathbf{b} \text{ y } x \blacktriangle z = \mathbf{a}.$$

iv) Para cada x, y, z ∈ A:

$$(x \blacktriangledown y) \blacktriangle z = (x \blacktriangle z) \blacktriangledown (y \blacktriangle z)$$
$$(x \blacktriangle y) \blacktriangledown z = (x \blacktriangledown z) \blacktriangle (y \blacktriangledown z)$$

decimos que el retículo es complementado y distributivo. □

Se puede demostrar que en un retículo complementado y distributivo el complemento es único.

Ejemplos

1) Cualquier orden lineal es un retículo. Lo que posiblemente no ocurra es que sea complementado y/o distributivo.

2) Sea $A = \{0,1\}$ y $\leq$ el orden natural. Se vé fácilmente que $\langle A, \leq \rangle$ es un retículo complementado y distributivo.

3) Sea A un conjunto. $\langle \mathcal{P}A, \subseteq \rangle$ es un retículo complementado y distributivo.

4) Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y en $\mathcal{P}\mathbb{N}$ definamos la relación de equivalencia siguiente: para cada $A, B \subseteq \mathbb{N}$:

$A \sim B$ syss $(A - B) \cup (B - A)$ es finito.

Sea $A^{\sim}$ la clase de equivalencia de A bajo $\sim$.
Sea C el conjunto cociente: $C = \{A^{\sim} / A \subseteq \mathbb{N}\}$.
Definamos $\leq$ sobre C mediante la fórmula $A^{\sim} \leq B^{\sim}$ syss $A - B$ es finito.
Se puede demostrar que efectivamente $\sim$ es una relación de equivalencia, que $\leq$ está bien definida y que $\langle C, \leq \rangle$ es un retículo complementado y distributivo.

NOTA 1

Entre retículos complementados y distributivos por un lado, y álgebras de Boole, por otro, hay una relación muy estrecha: se puede pasar de una estructura a otra aplicando las transformaciones siguientes:

Retículo complementado distributivo → Algebra de Boole:

$x \blacktriangledown y = \mathrm{Sup}(\{x, y\})$
$x \blacktriangle y = \mathrm{Inf}(\{x, y\})$
x^* conforme a iii)

Algebra de Boole → Retículo complementado distributivo:

$x \leq y \leftrightarrow x \blacktriangle y = x$
$\mathrm{Sup}(\{x, y\}) = x \blacktriangledown y$
$\mathrm{Inf}(\{x, y\}) = x \blacktriangle y$

Dada una álgebra de Boole $\mathscr{A}$, a ciertos subconjuntos de **A** cerrados sobre algunas de las operaciones del álgebra los llamados filtros y a otros ideales. En particular:

2.8.1. *Filtros e ideales*

Dada un álgebra de Boole $\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, ^*, \blacktriangledown, \blacktriangle \rangle$ y un $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{A}$ decimos que **F** es un filtro syss.

i) $\mathbf{F} \neq \varnothing$.

ii) Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{F}$: $\mathbf{x} \blacktriangle \mathbf{y} \in \mathbf{F}$.

iii) Para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{F}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$: si $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{y}$ entonces $\mathbf{y} \in \mathbf{F}$. □

Decimos que $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{A}$ es un ideal syss:

i) $\mathbf{I} \neq \varnothing$.

ii) Para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{I}$: $\mathbf{x} \blacktriangledown \mathbf{y} \in \mathbf{I}$.

iii) Para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{I}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$: si $\mathbf{y} \leqslant \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{y} \in \mathbf{I}$. □

Ejemplos

1) $\{\mathbf{a}\}$ es un ideal en $\mathscr{A}$, siendo $\mathscr{A}$ un álgebra de Boole y **a** el «cero» del álgebra. $\{\mathbf{b}\}$ es un filtro sobre $\mathscr{A}$.

2) Para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$: $\{\mathbf{y} / \mathbf{x} \leqslant \mathbf{y}\}$ es un filtro mientras que $\{\mathbf{y} / \mathbf{y} \leqslant \mathbf{x}\}$ es un ideal.

NOTA

Al final del capítulo V hay un apéndice, en donde pruebo los teoremas sobre filtros necesarios para la construcción de ultraproductos. Podeis consultarlo ahora, si lo estimais oportuno. Tened en cuenta que aquella es un álgebra de conjuntos, que el orden es la inclusión y las operaciones, las de unión e intersección de conjuntos.

3. RELACIONES ENTRE SISTEMAS AL MARGEN DEL LENGUAJE FORMAL DE PRIMER ORDEN

En este apartado vamos a introducir diversas relaciones entre sistemas sin utilizar en la definición el lenguaje formal de primer orden.

En primer lugar definiremos la noción de subsistema ($\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$) que es una generalización del concepto de subconjunto: el universo del primer sistema es un subconjunto del segundo, las funciones de ambos sistemas otorgan los mismos valores

a los elementos comunes y los elementos relacionados por las relaciones del primer sistema también lo están por las del segundo.

Definiremos también los conceptos de homomorfismo, inmersión e isomorfismo. En los tres casos se trata de una función que asigna valores en el segundo de los sistemas a los elementos del primero y que respeta las operaciones del segundo de forma que sea lo mismo operar en el primer sistema y encontrar el valor del resultado en el segundo de los sistemas, que hallar el valor de los elementos a operar y realizar ésta en el segundo de los sistemas, con sus operaciones.

Cuando $\mathbf{h}$ es un isomorfismo de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ ($\mathscr{A} \overset{\mathbf{h}}{\cong} \mathscr{B}$) ello lo que significa es que los dos sistemas son iguales a todos los efectos; que sus estructuras coinciden.

Cuando $\mathscr{A}$ está inmerso en $\mathscr{B}$ sucede que $\mathscr{B}$ contiene como subsistema a una copia de $\mathscr{A}$; es decir, $\mathscr{A} \mathrel{\tilde{\sqsubseteq}} \mathscr{B}$ significa que hay un sistema $\mathscr{C}$ tal que $\mathscr{A} \cong \mathscr{C}$ y $\mathscr{C} \sqsubseteq \mathscr{B}$.

La existencia de un homomorfismo entre $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ ($\mathbf{h}$: $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$) denota una cierta similitud de estructuras.

Entre estos conceptos se da la conexión siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{A} \mathrel{\tilde{\sqsubseteq}} \mathscr{B} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\mathscr{A} \cong \mathscr{B} \arrow[ur, Rightarrow] & & \mathscr{A} \to \mathscr{B} \\
 & \mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B} \arrow[uu, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

De ahora en adelante, a no ser que se diga lo contrario, $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ serán siempre los sistemas

$$\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{f}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j \in J} \rangle$$
$$\mathscr{B} = \langle \mathbf{B}\ \langle \mathbf{g}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{S}_j \rangle_{j \in J} \rangle$$

ambos de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$.

3.1. Subsistema

Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ sistemas similares. $\mathscr{A}$ es un subsistema de $\mathscr{B}$ (escribiremos $\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$) syss

i) $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$.

ii) Para cada $i \in I$: $\mathbf{f}_i = \mathbf{g}_i \mid \mathbf{A}^{\mu(i)}$. Es decir, para cada i, $\mathbf{f}_i$ es la restricción de $\mathbf{g}_i$ al universo de $\mathscr{A}$. O también, para cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)} \in \mathbf{A}$:

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)}) = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)}).$$

iii) Para cada $j \in J$: $\mathbf{R}_j = \mathbf{S}_j \cap \mathbf{A}^{\delta(j)}$.

En especial, los individuos destacados en $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ coinciden. Es decir, cuando $\mu(i) = 0$, $\mathbf{f}_i = \mathbf{g}_i$. □

Ejemplos

1) $\langle \{0\}, +, \cdot \rangle$ es un subsistema de $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$.

2) $\left\langle \{0,1,2\}, 0, \mathbf{f}\colon \begin{array}{l} 0 \to 1 \\ 1 \to 2, \\ 2 \to 1 \end{array} \{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle\} \right\rangle$ es un subsistema

de $\left\langle \{0,1,2,3\}, 0, \mathbf{g}\colon \begin{array}{l} 0 \to 1 \\ 1 \to 2, \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 2 \end{array} \{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle\} \right\rangle$.

3) $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$

Aunque en cada uno de estos sistemas las operaciones de suma y producto son funciones con distinto dominio y recorrido y debiéramos en consecuencia utilizar signos específicos para cada sistema, he querido enfatizar el hecho de que los resultados son los mismos cuando se trata de individuos que aparecen en más de un sistema: $2 + 2 = 4$ en cualquiera de ellos. Es decir,

$$+_{\mathbb{N}} = +_{\mathbb{Z}} \restriction \mathbb{N}^2 = +_{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{N}^2 = +_{\mathbb{R}} \restriction \mathbb{N}^2$$

$$+_{\mathbb{Z}} = +_{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{Z}^2 = +_{\mathbb{R}} \restriction \mathbb{Z}^2, \ +_{\mathbb{Q}} = +_{\mathbb{R}} \restriction \mathbb{Q}^2$$

Y lo mismo pasa con el producto.

4) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$

Ocurre aquí lo mismo que en el caso anterior, que el orden en cada uno de los sistemas es una relación de distinto dominio y recorrido, pero ponemos el mismo signo para resaltar las similitudes. Es decir,

$$\leq_{\mathbb{N}} \subseteq \leq_{\mathbb{Z}} \subseteq \leq_{\mathbb{Q}} \subseteq \leq_{\mathbb{R}}.$$

3.1.1. *Proposición*

La relación $\sqsubseteq$ es de orden entre sistemas del mismo tipo.

Demostración

1) Reflexiva. Para cada sistema $\mathcal{A}$ se comprueba fácilmente que $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{A}$.
En efecto, se cumple la condición i) de la definición, pues, evidentemente, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}$. También se cumple ii) de la definición puesto que $\mathrm{Dom}(\mathbf{f}_i) = \mathbf{A}^{n(i)}$ y por consiguiente,

$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i \mid \mathbf{A}^{\mu(i)}$, para cada $i \in I$. Por fin, también se cumple iii), puesto que $\mathbf{R}_j \subseteq \mathbf{A}^{\delta(j)}$ y por tanto $\mathbf{R}_j \cap \mathbf{A}^{\delta(j)} = \mathbf{R}_j$, para cada $j \in J$.

2) Antisimétrica. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ dos sistemas tales que $\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$ y $\mathscr{B} \sqsubseteq \mathscr{A}$, hemos de demostrar que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ coinciden, son el mismo sistema.

En primer lugar, los universos coinciden (pues $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ de donde se sigue $\mathbf{A} = \mathbf{B}$). Siendo los universos iguales, de la condición ii) obtenemos $\mathbf{f}_i = \mathbf{g}_i \mid \mathbf{A}^{\mu(i)} = \mathbf{g}_i \mid \mathbf{B}^{\mu(i)} = \mathbf{g}_i$, para cada $i \in I$. También $\mathbf{R}_j = \mathbf{S}_j \cap \mathbf{A}^{\delta(j)}$ por la condición iii), de donde se sigue que también $\mathbf{R}_j = \mathbf{S}_j$, pues $\mathbf{A}^{\delta(j)} = \mathbf{B}^{\delta(j)}$ y $\mathbf{S}_j \subseteq \mathbf{B}^{\delta(j)}$.

3) Transitiva. Sean $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ sistemas tales que $\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$ y $\mathscr{B} \sqsubseteq \mathscr{C}$. Demostraremos que $\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{C}$.

En primer lugar, de $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ se sigue directamente que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$. Sabemos también que para cada $i \in I$ se cumple $\mathbf{f}_i = \mathbf{g}_i \mid \mathbf{A}^{\mu(i)}$ y además $\mathbf{g}_i = \mathbf{h}_i \mid \mathbf{B}^{\mu(i)}$. Por tanto, $\mathbf{f}_i = (\mathbf{h}_i \mid \mathbf{B}^{\mu(i)}) \mid \mathbf{A}^{\mu(i)}$.

Por último, también sabemos que para cada $j \in J$: $\mathbf{R}_j = \mathbf{S}_j \cap \mathbf{A}^{\delta(j)}$ y $\mathbf{S}_j = \mathbf{T}_j \cap \mathbf{B}^{\delta(j)}$

Por consiguiente,

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{T}_j \cap \mathbf{B}^{\delta(j)} \cap \mathbf{A}^{\delta(j)} = \mathbf{T}_j \cap \mathbf{A}^{\delta(j)}$$

ya que $\mathbf{A}^{\delta(j)} \subseteq \mathbf{B}^{\delta(j)}$. ■

Problema 1

Sea $\mathscr{A}$ un sistema y $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$. Definamos $\mathscr{A} \mid \mathbf{B}$ de la siguiente manera:

$$\mathscr{A} \mid \mathbf{B} = \langle \mathbf{B}, \langle \mathbf{f}_i \mid \mathbf{B}^{\mu(i)} \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{R}_j \cap \mathbf{B}^{\delta(j)} \rangle_{j \in J} \rangle$$

Demostrad la equivalencia de las siguientes condiciones:

i) $\mathscr{A} \mid \mathbf{B}$ es un sistema.

ii) $\mathscr{A} \mid \mathbf{B} \sqsubseteq \mathscr{A}$.

iii) Para cada $i \in I$, el recorrido de la función $\mathbf{f}_i \mid \mathbf{B}^{\mu(i)}$ es un subconjunto de $\mathbf{B}$.

Problema 2

Sea $\mathscr{G}$ un grupo y sea $\mathscr{G}'$ un subsistema de $\mathscr{G}$. ¿Es $\mathscr{G}'$ un grupo?

Problema 3

Decimos que $\mathbf{H}$ es un segmento inicial de $\mathbb{N}$ syss:

i) $\mathbf{H} \subseteq \mathbb{N}$.

ii) $0 \in \mathbf{H}$.

iii) Para cada $x \in \mathbb{N}$: si $Sx \in \mathbf{H}$ entonces $x \in \mathbf{H}$.
$\mathbf{H}$ es propio syss $\mathbf{H} \neq \mathbb{N}$.

Demostrad que si $\mathbf{H}$ es un segmento inicial propio de $\mathbb{N}$, entonces $\langle \mathbb{N} - \mathbf{H}, +, \cdot \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$.

3.1.2. *Ejercicios*

1) Sea $\langle \mathbb{N}, 0, 3, \leq \rangle$. ¿Es posible encontrar un subsistema suyo con $2\mathbb{N}$ como universo?

2) ¿Es $\langle \mathbb{Z}_2, \bar{+}, \bar{\cdot} \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{Z}_5, \bar{+}, \bar{\cdot} \rangle$?
¿Es $\langle \mathbb{Z}_2, \bar{+}, \bar{\cdot} \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{Z}_4, \bar{+}, \bar{\cdot} \rangle$?

3) Si $\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ tiene estructura de orden parcial y $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ ¿es $\mathscr{A} \restriction \mathbf{B}$ un orden parcial? Si $\mathscr{A}$ fuera orden lineal, ¿sería $\mathscr{A} \restriction \mathbf{B}$ un orden lineal?

4) Sea $\mathscr{S}$ un álgebra de conjuntos. Encuentra un álgebra de Boole que la contenga; es decir un sistema $\mathfrak{T}$ tal que $\mathscr{S} \sqsubseteq \mathfrak{T}$.

5) Sea $\mathscr{B} = \langle \mathbf{B}, \mathbf{V}, \mathbf{F}, \neg, \vee, \wedge \rangle$ el álgebra de Lindenbaum (ejemplo 3 de 2.6) de las fórmulas de un cierto lenguaje L. Y sea $\mathscr{B}_0 = \langle \mathbf{B}_0, \mathbf{V}, \mathbf{F}, \neg, \vee, \wedge \rangle$ el álgebra de Lindenbaum de las sentencias de L.
Demostrad que $\mathscr{B}_0 \sqsubseteq \mathscr{B}$.
Para ello tendremos que «hacer la vista gorda» y considerar que cuando $\varphi \in$ SEN(L), $[\varphi]$ en el conjunto de las sentencias de L coincide con $[\varphi]$ en el de las fórmulas de L, aunque no sea así porque en esta última haya fórmulas que no sean sentencias. Es decir, identificamos...

$$[\varphi] = \{\psi \in \mathrm{SEN(L)} / \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\} \text{ con } [\varphi] = \{\psi \in \mathrm{FOR(L)} / \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$$

NOTA

Pensad que pasaría si en el ejercicio 2) hiciéramos una identificación similar. ¿Variaría vuestra respuesta?

3.2. Reducción

$\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{f}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j \in J} \rangle$ de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$ es una reducción de $\mathscr{B} = \langle \mathbf{B}, \langle \mathbf{g}_i \rangle_{i \in I'}, \langle \mathbf{S}_j \rangle_{j \in J'} \rangle$ de tipo $\langle \mu', \delta' \rangle$ syss.

i) $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

ii) $I \subseteq I'$, $\mu = \mu' \mid I$, para cada $i \in I$: $\mathbf{f}_i = \mathbf{g}_i$.

iii) $J \subseteq J'$, $\delta = \delta' \mid J$, para cada $j \in J$: $\mathbf{R}_j = \mathbf{S}_j$. □

Para decirlo más sencillamente, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sólo se diferencian en que en $\mathcal{A}$ hay posiblemente menos relaciones y funciones que en $\mathcal{B}$.

NOTA

Siempre que $\mathcal{A}$ sea una reducción de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ será una expansión de $\mathcal{A}$. Son particularmente interesantes las expansiones en donde se destacan todos los elementos del universo del sistema, a las que llamaremos expansiones completas.

Sea $\mathcal{A}$ un sistema y sea $\langle \mathbf{a}_k \rangle_{k \in K}$ una sucesión de elementos de $\mathbf{A}$; es decir, una función del conjunto de índices K en $\mathbf{A}$. Decimos que la sucesión es una enumeración de $\mathbf{A}$ si cada uno de los elementos de $\mathbf{A}$ aparece al menos una vez. Cuando aparecen todos y además no se repiten, decimos que se trata de una enumeración sin repeticiones.

A la expansión de $\mathcal{A}$ en donde se destacan los individuos que aparecen en la sucesión $\langle \mathbf{a}_k \rangle_{k \in K}$ la denotaremos mediante el par $\langle \mathcal{A}, \langle \mathbf{a}_k \rangle_{k \in K} \rangle$.

Por último, para abreviar, escribiremos a veces $\hat{\mathbf{a}}$ en vez de $\langle \mathbf{a}_k \rangle_{k \in K}$ y $\langle \mathcal{A}, \hat{\mathbf{a}} \rangle$ para el sistema expandido.

Ejemplos

1) $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ es una reducción de $\langle \mathbb{N}, 0, + \rangle$, que lo es a su vez de $\langle \mathbb{N}, 0, +, \cdot \rangle$.

2) $\left\langle \{0,1\}, 0, \mathbf{f}: \begin{matrix} 0 \to 1 \\ 1 \to 1 \end{matrix}, \{0\}, \{\langle 0,0 \rangle\} \right\rangle$ es una reducción de

$$\left\langle \{0,1\}, 0, \mathbf{f}, \mathbf{g}: \begin{matrix} 0 \to 0 \\ 1 \to 1 \end{matrix}, \{0\}, \{\langle 0, 0 \rangle\}, \{\langle 0,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle\} \right\rangle$$

3.3. Homomorfismo

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos sistemas del mismo tipo $\langle \mu, \delta \rangle$.

Una función $\mathbf{h}$ de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ syss.

i) Para cada $i \in I$ y cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)} \in \mathbf{A}$:

$$\mathbf{h}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)})) = \mathbf{g}_i(\mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\mu(i)})).$$

En especial, $\mathbf{h}(\mathbf{f}_i) = \mathbf{g}_i$ cuando $\mu(i) = 0$.

ii) Para cada $j \in J$ y cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \in \mathbf{A}$:

si $\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{R}_j$ entonces $\langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\delta(j)}) \rangle \in \mathbf{S}_j$. □

NOTA

Cuando vale el bicondicional en la condición ii), decimos que es un homomorfismo fuerte. □

Para indicar que $\mathbf{h}$ es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ escribiremos $\mathbf{h}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Ejemplos

1) La función
$$\begin{array}{l} \mathbf{h}: \{0,1,2\} \to \{3,4\} \\ \qquad 0 \to 3 \\ \qquad 1 \to 4 \\ \qquad 2 \to 3 \end{array}$$

es un homomorfismo del sistema $\left\langle \{0,1,2\},\ f: \begin{array}{l} 0 \to 1 \\ 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \end{array} \right\rangle$

en el sistema $\left\langle \{3,4\},\ \mathbf{g}: \begin{array}{l} 3 \to 4 \\ 4 \to 3 \end{array} \right\rangle$

2) La función $\mathbf{h}: \{\dot{0},\dot{1}\} \to \{\dot{0},\dot{1},\dot{2},\dot{3}\}$

$$\begin{array}{l} \dot{0} \to \dot{0} \\ \dot{1} \to \dot{2} \end{array}$$

es un homomorfismo del sistema $\langle \mathbb{Z}_2, \dot{0}, \dot{+} \rangle$ en el sistema $\langle \mathbb{Z}_4, \dot{0}, \dot{+} \rangle$.

3) Si $\mathcal{G} = \langle \mathbf{G}, \mathbf{e}, \# \rangle$ y $\mathcal{H} = \langle \mathbf{H}, 0, \perp \rangle$ son grupos, la función $\begin{array}{l} \mathbf{h}: \mathbf{G} \to \mathbf{H} \\ \qquad \mathbf{x} \to 0 \end{array}$

es un homomorfismo.

4) También, si $\mathcal{G} = \langle \mathbf{G}, \mathbf{e}, \# \rangle$ es un grupo conmutativo, la función

$$\begin{array}{l} \mathbf{h}: \mathbf{G} \to \mathbf{G} \\ \qquad \mathbf{x} \to \underbrace{\mathbf{x} \# \ldots \# \mathbf{x}}_{n\text{-veces}} \end{array}$$

es homomorfismo de grupos.

5) Entre los sistemas $\langle 2\mathbb{N}, +, \leq \rangle$ y $\langle \mathbb{N}, +, \leq \rangle$ se pueden definir, entre otros, los siguientes homomorfismos.

a) $\begin{array}{l} \mathbf{h}_1: 2\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ \qquad \mathbf{x} \to 0 \end{array}$. Esta función no es inyectiva y no será lo que en el apartado siguiente definiremos como inmersión.

b) $\mathbf{h}_2$: $2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Esta función es inyectiva y define una inmersión de siste-
$\mathbf{x} \to \mathbf{x}$
mas.

c) $\mathbf{h}_3$: $2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Esta función es biyectiva y define un isomorfismo.
$\mathbf{x} \to \mathbf{x}/2$

Pese a lo que puedan sugerir estos ejemplos, no todo homomorfismo inyectivo es inmersión ni todo homomorfismo biyectivo es isomorfismo.

3.3.1. *Proposición*

Si $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ entonces $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ y la función $\mathbf{h}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ que a cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ lo manda a sí mismo, es un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

Demostración

Sea $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$. En primer lugar, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. Además se cumplen la condición i) de homomorfismo, pues para cada $i \in I$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)} \in \mathbf{A}$:

$$\mathbf{h}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)})) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)}) = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)}) = \mathbf{g}_i(\mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\mu(i)})),$$

y la condición ii), pues para cada $j \in J$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \in \mathbf{A}$,

$$\text{si } \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{R}_j \text{ entonces } \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{S}_j,$$

pero $\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \rangle = \langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\delta(j)}) \rangle$. ■

Problema 4

Sea $\mathbf{h}$ un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, ¿es la imagen de $\mathcal{A}$ mediante $\mathbf{h}$ un subsistema de $\mathcal{B}$?

Llamamos imagen homomórfica de $\mathcal{A}$ mediante $\mathbf{h}$ al sistema

$$\mathbf{h}[\mathcal{A}] = \langle \mathbf{h}[\mathbf{A}], \langle \mathbf{h}[\mathbf{f}_i] \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{h}[\mathbf{R}_j] \rangle_{j \in J} \rangle$$

donde

$$\mathbf{h}[\mathbf{f}_i] : (\mathbf{h}[\mathbf{A}])^{\mu(i)} \to \mathbf{h}[\mathbf{A}]$$
$$\langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\mu(i)}) \rangle \to \mathbf{h}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)}))$$
$$\mathbf{h}[\mathbf{R}_j] = \{ \langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\delta(j)}) \rangle \ / \ \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{R}_j \}$$

NOTA

Aquí $\mathbf{h}[\mathbf{A}]$ representa la imagen de $\mathbf{A}$ mediante $\mathbf{h}$. En general, dados una función $\mathbf{f}$ y un conjunto $\mathbf{B}$, $\mathbf{f}[\mathbf{B}] = \text{Rec}\ \mathbf{f} \mid \mathbf{B}$.

Problema 5

Dado un homomorfismo $\mathbf{h}$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, ¿es $\mathcal{B} \mid \mathbf{h}[\mathbf{A}] \sqsubseteq \mathcal{B}$?

Problema 6

Si $\mathbf{h}$ y $\mathbf{h}'$ son homomorfismos, $\mathbf{h}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $\mathbf{h}': \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ entonces $\mathbf{h} \circ \mathbf{h}'$ es un homomorfismo.

3.3.2. *Ejercicios*

1) Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ dos grupos y sea $\mathbf{h}$ un homomorfismo de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{H}$. Demostrad:

i) $\mathbf{h}(\mathbf{e}) = \mathbf{o}$. ($\mathbf{e}$ es el neutro de $\mathcal{G}$ y $\mathbf{o}$ el de $\mathcal{H}$).

ii) Para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{G}$:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^{-1}) = (\mathbf{h}(\mathbf{x}))^*$$

($\mathbf{x}^{-1}$ es el simétrico de $\mathbf{x}$ en $\mathcal{G}$ y $(\mathbf{h}(\mathbf{x}))^*$ es el simétrico de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ en $\mathcal{H}$).

iii) Para cada conjunto $\mathbf{B}$:
si $\mathcal{G} \mid \mathbf{B} \sqsubseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{H} \mid \mathbf{h}[\mathbf{B}] \sqsubseteq \mathcal{H}$.

iv) Definamos $\text{Ker}(\mathbf{h}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{G}/\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\}$.

Demostrad que $\mathbf{h}$ es inyectiva syss $\text{Ker}(\mathbf{h}) = \mathbf{e}$.

2) Sea $\mathbf{h}$ un homomorfismo de un orden lineal $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ en un sistema del mismo tipo $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B}, \mathbf{S} \rangle$. ¿Es $\mathbf{h}[\mathcal{A}]$ un orden lineal?

3) Sea $\mathbf{h}$ un homomorfismo de un sistema de Peano $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{f} \rangle$ en un sistema del mismo tipo, $\langle \mathbf{B}, \mathbf{b}, \mathbf{g} \rangle$. ¿Verifica $\mathbf{h}[\mathcal{A}]$ alguna de las propiedades de los sistemas de Peano?

4) Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole y sea $\mathbf{h}$ un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en un sistema similar $\mathcal{B}$. ¿Es $\mathbf{h}[\mathcal{A}]$ un álgebra de Boole?

3.4. Inmersión

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos sistemas del mismo tipo $\langle \mu, \delta \rangle$.
Una función $\mathbf{h}$ de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es una inmersión de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ syss.

i) $\mathbf{h}$ es inyectiva. Es decir, para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{A}$:

$$\text{si } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{y}) \text{ entonces } \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

ii) Para cada $i \in I$, cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)} \in \mathbf{A}$:

$$\mathbf{h}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)})) = \mathbf{g}_i(\mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\mu(i)})).$$

Esta condición es la misma que en los homomorfismos.

iii) Para cada $j \in J$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \in \mathbf{A}$:

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{R}_j \text{ syss } \langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\delta(j)}) \rangle \in \mathbf{S}_j. \ \square$$

NOTA

$\mathcal{A} \ \underset{\sim}{\square}\ \mathcal{B}$ es una abreviatura de: Existe una función $\mathbf{h}$ tal que $\mathbf{h}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $\mathbf{h}$ es una inmersión.

Ejemplos

1) El ejemplo 2) de homomorfismo de $\langle \mathbb{Z}_2, \hat{0}, \hat{+} \rangle$ en $\langle \mathbb{Z}_4, \hat{0}, \hat{+} \rangle$ es también un ejemplo de inmersión.

2) Sea $\mathcal{E} = \langle \{SE, TO, M, BU, S,\}, N \rangle$ el sistema formado por las ciudades españolas de Sevilla, Toledo, Madrid, Burgos y Santander junto con la relación «estar al norte de». Sea $\mathcal{C} = \langle \{SF, LA, SD\}, S \rangle$ el sistema formado por las ciudades californianas de San Francisco, Los Angeles y San Diego, junto a la relación S de «estar al sur de». La función

$$\begin{aligned} \mathbf{h}:\ & SF \to SE \\ & LA \to M \\ & SD \to S \end{aligned}$$

es una inmersión de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{E}$.

3) $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle \ \underset{\sim}{\square}\ \langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle\ \mathcal{A}\ \underset{\sim}{\square}\ \langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle \ \underset{\sim}{\square}\ \langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ son sistemas inmersos unos en otros.

4) $\langle 2\mathbb{N}, +, 2\mathbb{N} \rangle \ \underset{\sim}{\square}\ \langle \mathbb{N}, +, 2\mathbb{N} \rangle$. La inmersión es la función identidad.

5) $\langle \mathbb{N}, 0, +, \leqslant \rangle \mathrel{\tilde{\sqsubseteq}} \langle \mathbb{N}, 1, \cdot, \leqslant \rangle$.

Problema 7

Pensad qué pasaría si en el problema 4 se sustituyera la condición de que $\mathbf{h}$ sea homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, por la de que sea inmersión. ¿Es $\mathbf{h}[\mathcal{A}] \sqsubseteq \mathcal{B}$?

3.5. Isomorfismo

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$. La función $\mathbf{h}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ syss:

i) $\mathbf{h}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es biyectiva; es decir, $\mathbf{h}$ es inyectiva y exhaustiva.

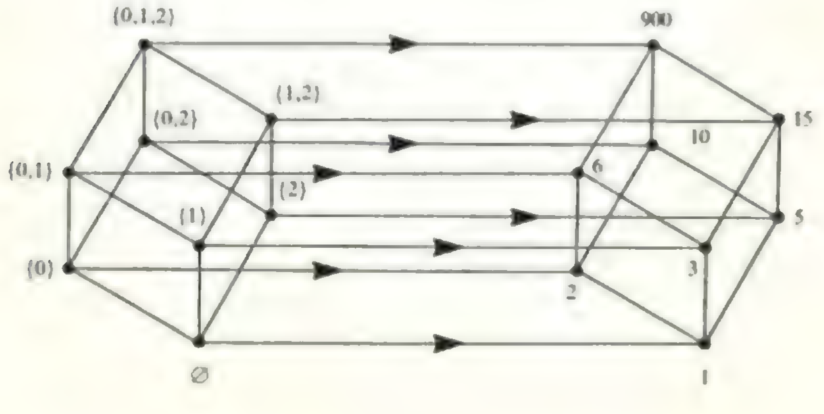
Las condiciones ii) y iii) coinciden con las de inmersión.

NOTA

$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ es una abreviatura de: Existe una función $\mathbf{h}$ tal que $\mathbf{h}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $\mathbf{h}$ es un ismorfismo.

Ejemplos

1) Sea $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \subseteq \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B}, / \rangle$



El sistema $\mathscr{A}$ tiene como universo $\mathscr{P}\{0,1,2,\}$; es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de $\{0,1,2,\}$. La relación en $\mathscr{A}$ es la inclusión.

El sistema $\mathscr{B}$ tiene como universo a $\{1,2,3,4,5,6,10,15,900\}$. La relación en $\mathscr{B}$ es «...divide a...».

La función **h** es la marcada con flechas en la figura.

2) Si tomamos los sistemas de Peano $\langle \mathbb{N}, 0, \mathbf{S}\rangle$ y $\langle 2\mathbb{N}, 0, \mathbf{S}'\rangle$ (donde $2\mathbb{N}$ son los naturales pares y $\mathbf{S}'$ es operación de sumar dos), se puede demostrar que la función **h** de $2\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que manda a cada $\mathbf{x} \in 2\mathbb{N}$ a $\mathbf{x}/2$, es un isomorfismo.

3) Sea $\langle \mathbb{N}, <\rangle$ el sistema de los naturales con la relación de orden. Sea $\langle \mathbb{N} - \{0\}, <\rangle$. La función **h** de $\mathbb{N} - \{0\}$ en $\mathbb{N}$, definida mediante $\mathbf{h}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} - 1$, es un isomorfismo. Sin embargo, la identidad, $\mathbf{I} \mid (\mathbb{N} - \{0\})$, es una inmersión.

NOTA

Para que dos sistemas sean isomorfos hace falta que sus universos sean biyectables; es decir, equipotentes. Han de tener la misma cardinalidad.

4) Sea $\mathscr{A} = \langle \mathscr{P}\{1,2\}, \cap, \cup\rangle$, $\mathscr{B} = \langle\{\varnothing, \{7\}, \{1,3\}, \{1,3,7\}\}, \cap, \cup\rangle$.

La función:

$$\mathbf{h}: \{\varnothing, \{1\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \rightarrow \{\varnothing, \{7\}, \{1,3\}, \{1,3,7\}\}$$

$$\begin{aligned} \varnothing &\rightarrow \varnothing \\ \{1\} &\rightarrow \{7\} \\ \{2\} &\rightarrow \{1,3\} \\ \{1,2\} &\rightarrow \{1,3,7\} \end{aligned}$$

es un isomorfismo entre $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$.

Los sistemas isomorfos presentan una semejanza total, sus universos son biyectables, y las relaciones y funciones entre los elementos de dichos universos son las mismas. Es por ello por lo que isomorfía en matemáticas es casi tanto como identidad; identidad entre estructuras. Desde luego, en el lenguaje de primer orden que introduciremos para hablar acerca de los sistemas, no podremos diferenciar a los sistemas isomorfos; simultáneamente satisfacen las mismas sentencias. Introduciremos la noción de equivalencia elemental entre sistemas —definida precisamente por la propiedad de satisfacer simultáneamente las mismas sentencias— y veremos que isomorfía implica equivalencia elemental pero no equivale a ello.

3.5.1. *Proposición*

$\mathbf{h}$ es isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ syss $\mathbf{h}$ es homomorfismo y existe un homomorfismo $\mathbf{h}'$ de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$ tal que $\mathbf{h} \circ \mathbf{h}'$ es la identidad sobre $\mathcal{B}$ y $\mathbf{h}' \circ \mathbf{h}$ es la identidad sobre $\mathcal{A}$.

Demostración

[$\Rightarrow$] Sea $\mathbf{h}$ isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Claramente $\mathbf{h}$ es homomorfismo. Además la función $\mathbf{h}^{-1}$ de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$ cumple:

$$\mathbf{h} \circ \mathbf{h}^{-1} = \mathbf{I} \mid \mathbf{B}, \ \mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{h} = \mathbf{I} \mid \mathbf{A}.$$

[$\Leftarrow$] Sea $\mathbf{h}$ un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ y supongamos también que exista un homomorfismo $\mathbf{h}'$ de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$ tal que $\mathbf{h} \circ \mathbf{h}'$ es la identidad sobre $\mathcal{B}$ y $\mathbf{h}' \circ \mathbf{h}$ es la identidad sobre $\mathcal{A}$.

Se cumple

i) $\mathbf{h}$ es biyectiva, pues si $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{y})$ entonces $\mathbf{h}'(\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}'(\mathbf{h}(\mathbf{y}))$, de donde $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Además, $\mathbf{h}$ es exhaustiva pues si $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$, $\mathbf{h}'(\mathbf{x}) \in \mathbf{A}$ y $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{h}'(\mathbf{x}))$.

ii) Se verifica, por ser $\mathbf{h}$ homomorfismo.

iii) Por ser $\mathbf{h}$ homomorfismo, para cada $j \in J$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \in \mathbf{A}$:

$$\text{si } \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{R}_j \text{ entonces } \langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\delta(j)}) \rangle \in \mathbf{S}_j.$$

Por ser $\mathbf{h}'$ homomorfismo,

$$\text{si } \langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\delta(j)}) \rangle \in \mathbf{S}_j \text{ entonces } \langle \mathbf{h}'(\mathbf{h}(\mathbf{x}_1)), \ldots, \mathbf{h}'(\mathbf{h}(\mathbf{x}_{\delta(j)})) \rangle = \\ = \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{R}_j.$$

Con lo que hemos demostrado que vale el bicondicional. ■

3.5.2. *Proposición*

Sea $\mathbf{h}$ un homomorfismo fuerte de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. $\mathbf{h}$ es inmersión syss $\mathbf{h}$ es isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathbf{h}[\mathcal{A}]$.

Demostración

Sea $\mathbf{h}$ un homomorfismo fuerte de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

[$\Rightarrow$] Supongamos que $\mathbf{h}$ es inmersión. $\mathbf{h}$ es también isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathbf{h}[\mathcal{A}]$ pues lo único que nos faltaba era que la función fuera exhaustiva y ahora lo es.

[$\Leftarrow$] Sea $\mathbf{h}$ un isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathbf{h}[\mathcal{A}]$. La función $\mathbf{h}$: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ es inyectiva y se

cumplen las demas condiciones de inmersión, que coinciden con las de homomorfismo fuerte. ■

NOTA

Hace falta que el homomorfismo sea fuerte, pues en otro caso $\mathbf{h}[\mathcal{A}]$ pudiera no ser subsistema de $\mathcal{B}$. Piénsese en el siguiente contraejemplo: $\mathcal{A} = \langle \{0,1\}, \{0\} \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \{0,1\}, \{0,1\} \rangle$, $\mathbf{h}[\mathcal{A}] = \langle \{0,1\}, \{0\} \rangle$ tomando como $\mathbf{h}$ la identidad. Claramente $\mathcal{A} \cong \mathbf{h}[\mathcal{A}]$ pero $\mathbf{h}$ no es inmersión.

3.5.3. *Corolario*

Sea $\mathbf{h}$ un homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. $\mathbf{h}$ es inmersión syss $\mathbf{h}$ es isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B} \mid \mathbf{h}[\mathbf{A}]$. Tened en cuenta que en esas condiciones $\mathbf{h}[\mathcal{A}] = \mathcal{B} \mid \mathbf{h}[\mathbf{A}]$. ■

3.5.4. *Proposición*

$\mathbf{h}$ es inmersión de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ syss existe un sistema $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{B}$ y $\mathbf{h}$ es isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}$.

Demostración

[⇒] Por el corolario 3.5.3., si $\mathbf{h}$ es inmersión, entonces el sistema $\mathcal{B} \mid \mathbf{h}[\mathbf{A}]$ cumple las dos condiciones, es subsistema de $\mathcal{B}$ e isomorfo a $\mathcal{A}$ por $\mathbf{h}$.

[⇐] Sea $\mathbf{h}$ isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{B}$. Veremos que $\mathbf{h}$ es inmersión de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

i) $\mathbf{h}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ inyectiva pues $\mathbf{h}: \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ biyectiva y $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B}$.

ii) Para cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)} \in \mathbf{A}$: $\mathbf{h}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu(i)})) = \mathbf{h}_i(\mathbf{h}(\mathbf{x}_i), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\mu(i)})) = \mathbf{g}_i \mid \mathbf{C}(\mathbf{h}(\mathbf{x}_i), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\mu(i)})) = \mathbf{g}_i(\mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\mu(i)}))$, pues $\mathbf{C} = \mathbf{h}[\mathbf{A}]$.

iii) Para cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \in \mathbf{A}$: $\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{R}_j$
syss $\langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\delta(j)}) \rangle \in \mathbf{T}_j$
syss $\langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\delta(j)}) \rangle \in \mathbf{S}_j \cap \mathbf{C}^{\delta(j)}$
syss $\langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\delta(j)}) \rangle \in \mathbf{S}_j \cap \mathbf{h}[\mathbf{A}]^{\delta(j)}$
syss $\langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_{\delta(j)}) \rangle \in \mathbf{S}_j$. ■

NOTA

Esta proposición refleja el principal significado intuitivo de la inmersión. Es éste el motivo por el que hemos elegido $\overset{\sim}{\sqsubseteq}$ como signo para representarla: una combinación de $\sqsubseteq$, subsistema, y de $\cong$, isomorfía.

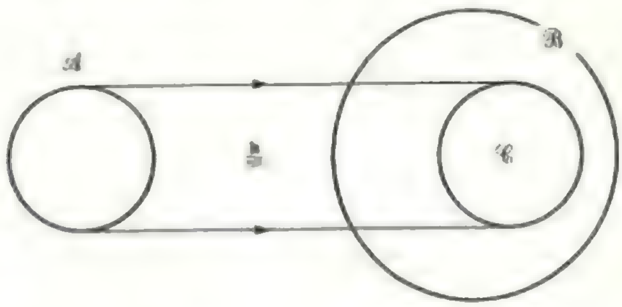
3.5.5. *Proposición*

Si $\mathcal{A} \overset{\mathbf{h}}{\sqsubseteq} \mathcal{B}$ —es decir, si **h** es una inmersión de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, entonces hay un sistema $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \overset{\bar{\mathbf{h}}}{\cong} \mathcal{B}$ siendo $\mathbf{h} = \bar{\mathbf{h}} \mid \mathbf{A}$.

Demostración

Os la dejo como ejercicio (3.5.7, número 6).

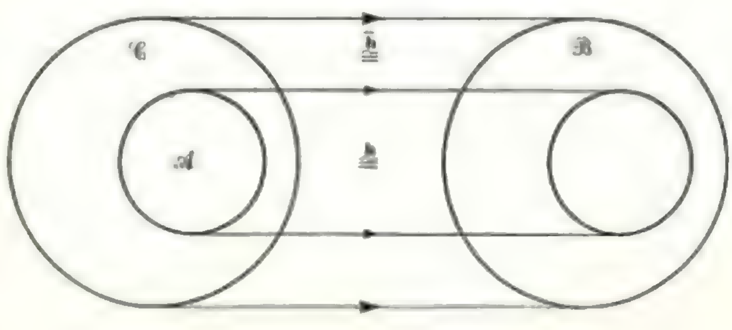
Tened en cuenta que la proposición 3.5.4 expresaba:



Hay una copia de $\mathcal{A}$ dentro de $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{B}$$

Mientras que la proposición 3.5.5 expresa:



$\mathcal{A}$ está dentro de una copia de $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{C} \cong \mathcal{B} \qquad \blacksquare$$

3.5.6. *Proposición*

La relación $\cong$, de isomorfía entre sistemas del mismo tipo, es una relación de equivalencia.

Demostración

1) Reflexiva. $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ pues la identidad sobre **A** es isomorfía.

2) Simétrica. Si $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$. En efecto, si **h** es isomorfía entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, su inversa $\mathbf{h}^{-1}$ lo será entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$.

3) Transitiva. Si $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$. En efecto, si **h** es isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ y **g** lo es de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$, la función compuesta **g** o **h** es isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}$. $\blacksquare$

3.5.7. *Ejercicios*

1) Detallad la prueba de proposición 3.5.6.

2) Encontrad un ejemplo de dos sistemas similares $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no isomorfos y tales que exista un homomorfismo **h** de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ siendo **h** biyectiva.

3) Demostrad que la relación $\tilde{\sqsubseteq}$ es reflexiva y transitiva, pero no antisimétrica.

4) Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales 0,1,2. ... Decid en cada ejemplo si es verdadero o falso.

$$\langle \mathbb{N}, 0, +, \leq \rangle \tilde{\sqsubseteq} \langle \mathbb{N}, 1, \cdot, \leq \rangle$$

$$\langle \mathbb{N}, 1, \cdot, \leq \rangle \tilde{\sqsubseteq} \langle \mathbb{N}, 0, +, \leq \rangle$$

$$\langle \mathbb{N} - \{0\}, 1, \cdot, \leq \rangle \tilde{\sqsubseteq} \langle \mathbb{N}, 0, +, \leq \rangle$$

$$\langle \mathbb{N} - \{0\}, 1, \cdot \rangle \tilde{\sqsubseteq} \langle \mathbb{N}, 0, + \rangle$$

$$\langle \mathbb{N} - \{0\}, \cdot \rangle \tilde{\sqsubseteq} \langle \mathbb{N}, + \rangle$$

5) Encontrad dos sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tales que $\mathcal{A} \,\Box\, \mathcal{B} \,\Box\, \mathcal{A}$ pero $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$.

6) Demostrad la proposición 3.5.5.

Problema 8

Sea $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ y $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B}, \mathbf{S} \rangle$ dos sistemas isomorfos. Demostrad que si uno de ellos tiene estructura de orden parcial (o lineal, o buen orden), también la tendrá el otro.

Problema 9

¿Recordais el esquema de la introducción de este apartado?

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A}\,\tilde{\Box}\,\mathcal{B} & \\ \Nearrow & & \Searrow \\ \mathcal{A} \cong \mathcal{B} & & \mathcal{A} \to \mathcal{B} \\ & \Uparrow & \\ & \mathcal{A}\,\Box\,\mathcal{B} & \end{array}$$

Justificadlo

Problema 10

Sea $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ un sistema con estructura de orden parcial. Definamos la función $\mathbf{h}: \mathbf{A} \to \mathcal{P}\mathbf{A}$ mediante la ecuación $\mathbf{h}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} / \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \in \mathbf{R}\}$ y sea $\mathbf{B} = \mathrm{Rec}(\mathbf{h})$. Demostrad que $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle \cong \langle \mathbf{B}, \subseteq \rangle$.

3.6. Homomorfismo exhaustivo

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas similares. $\mathbf{h}: \mathbf{A} \to \mathcal{B}$ es un homomorfismo exhaustivo syss $\mathbf{h}$ es homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ y la función $\mathbf{h}$ es exhaustiva.

Ejemplo

Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ y sea $\mathcal{M} = \langle \{p, i\}, +^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}} \rangle$ donde las operaciones $+^{\mathcal{M}}$ y $\cdot^{\mathcal{M}}$ son las dadas por las tablas:

$+^{\mathcal{M}}$	p	i
p	p	i
i	i	p

$\cdot^{\mathcal{M}}$	p	i
p	p	p
i	p	i

La función h: $\mathbb{N} \to \{p, i\}$ definida por

$$\mathbf{h}(\mathbf{n}) = \begin{cases} p, \text{ si } \mathbf{n} \text{ es par} \\ i, \text{ si } \mathbf{n} \text{ es impar} \end{cases}$$

no es una inmersión de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}$, es un epimorfismo de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}$.

3.7. Conviene saber

1) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos sistemas numerables que tienen ambos estructura de orden denso sin extremos, entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

2) Cada álgebra de Boole es isomorfa a un álgebra de conjuntos.

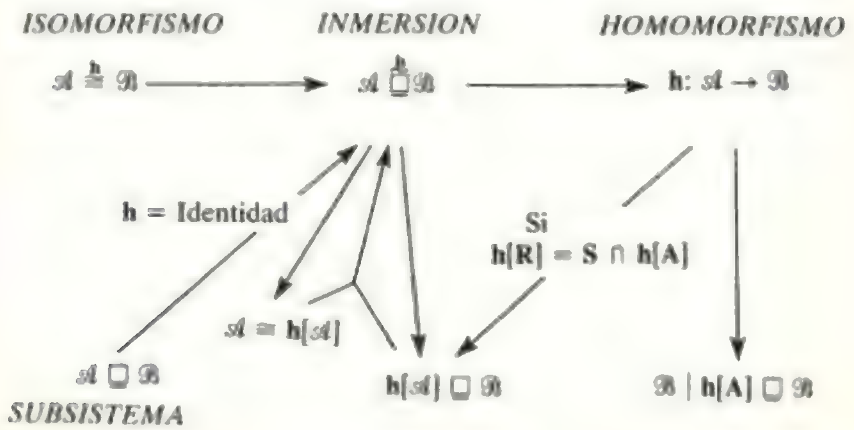
3) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son sistemas de Peano, entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. (En los sistemas de Peano, definidos en el metalenguaje, el axioma de inducción se formula con toda su potencia.) Este resultado no debe engañarnos: no anula la existencia de modelos no estándar de la aritmética. Hay modelos no estándar, entre otros motivos, porque el lenguaje de primer orden no es suficientemente expresivo.

4) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son sistemas isomorfos con estructura de buen orden, el isomorfismo es único.

5) Dos álgebras de Boole sin átomos y numerables son isomorfas.

6) Dos cuerpos algebraicamente cerrados, de la misma característica y del mismo cardinal, superior al de los naturales, son isomorfos.

3.8. Resumen



II

Capítulo II
LENGUAJES DE PRIMER ORDEN: SEMANTICA

INTRODUCCION

En el capítulo anterior estudiamos los sistemas con independencia del lenguaje de primer orden. Sin embargo, si queremos penetrar en el santuario de la Teoría de Modelos, necesitamos un lenguaje formal. El lenguaje que emplearemos es el de primer orden con igualdad. Los objetos de dicho lenguaje son signos y filas de signos. Concretamente, tendremos signos lógicos, variables, relatores y functores. Además de decir qué signos componen el alfabeto del lenguaje, tendremos que explicitar cuáles son las combinaciones lícitas de signos: cómo se forman los términos y fórmulas del lenguaje. Las reglas de formación de estas expresiones serán de naturaleza recursiva, y nos proporcionarán un procedimiento de decisión para saber si una determinada sucesión de signos del alfabeto es o no una fórmula o un término.

La cardinalidad de un lenguaje formal es la del conjunto de las fórmulas que pueden escribirse con sus signos. Nosotros estudiaremos lenguajes formales de primer orden cuyo conjunto de signos lógicos es finito, el de variables es infinito-numerable y el de los signos peculiares —relatores y functores propios del lenguaje considerado— tiene cualquier cardinalidad finita o infinita. Consecuentemente, estos lenguajes podrán tener cualquier cardinalidad infinita.

En los primeros tiempos de la Teoría de Modelos los lenguajes que se manejaban eran siempre numerables y se pensaba que un signo debiera ser algo que pudiera escribirse en un papel para su reconocimiento mediante «inspección ocular». Para que esto ocurriera haría falta que el conjunto de los signos fuera a lo sumo numerable y preferiblemente recursivo. Sin embargo, para ciertas aplicaciones algebraicas es preferible no tener este tipo de limitación. Nuestros «signos» lo serán en un sentido puramente formal, nuestros «lenguajes» lo serán en un sentido laxo y aceptaremos como nombre a cualquier objeto matemático —en particular, a los ordinales—.

Incluso, en ocasiones, haremos que un objeto matemático sirva también como nombre de sí mismo.

Como he dicho, los objetos de nuestro lenguaje formal son signos y filas de signos. Por otra parte, los sistemas —que son los objetos matemáticos de los que hablamos— están formados por conjuntos, relaciones y funciones. En semántica, conectamos estos dos tipos de realidades. El puente entre ellas es la noción de verdad. Siguiendo a Tarski diremos que una sentencia φ es verdadera en un sistema $\mathcal{A}$ —o lo que es lo mismo, que $\mathcal{A}$ es modelo de φ— si es realmente el caso que se dé φ en $\mathcal{A}$. (La sentencia «la nieve es blanca» es verdadera si realmente la nieve es blanca). Naturalmente, no lo diremos así, sino que precisaremos qué queremos decir con «que se dé realmente el caso».

Para definir el valor de verdad de una fórmula fijaremos previamente la interpretación de los signos que aparecen en ella. Sobre dicha interpretación de los signos nos basamos para hacer que todos los términos del lenguaje denoten individuos del sistema y que todas las fórmulas del lenguaje sean verdaderas o falsas en el sistema.

Las fórmulas de nuestro lenguaje están construidas con signos lógicos, variables, igualdad y signos peculiares. Los signos lógicos tienen una interpretación fijada de antemano; se pretende que expresen conyunción, disyunción, etc. Dicha interpretación es independiente del sistema concreto que estemos considerando: el negador expresará negación tanto si la fórmula en que aparece habla de un anillo, como si hablara de los números naturales. Las variables se refieren a elementos del universo del discurso y cuando no aparecen cuantificadas en una fórmula, funcionan como parámetros: con cada asignación de valor a las variables se asocia un valor de verdad de la fórmula.

¿Y los signos peculiares, a quien deben referirse? Está claro que la interpretación de un relator debiera ser una relación y la de un functor una función. Para nosotros, que definimos la verdad relativa a un sistema, los relatores y functores serán las relaciones y funciones destacadas en él. Sin embargo, cuando se pensaba que las fórmulas eran verdaderas o falsas en el Universo matemático, resultaba mucho más difícil interpretar los relatores y functores.

Históricamente* la noción de verdad en el Universo precedió a la de verdad en un sistema. Esta última se entendió y utilizó correctamente desde los años veinte pero no hubo definición inductiva y explícita de la misma hasta 1957. Así, Frege, Russell e incluso el propio Tarski de «The concept of truth in formalized languages» (1935) hablaban de sentencias verdaderas, tales como $\forall x\ (Rx \leftrightarrow Rx)$, pero no de que una sentencia tal como $\forall xy\ fxy = fyx$ pudiera ser verdadera en un grupo. De hecho, aunque Tarski y Gödel usaron profusamente en sus trabajos el concepto de verdad en un sistema, fue un concepto primitivo durante más de treinta años. Es en «Arithmetical extensions of relational systems» (1957), escrito conjuntamente por Tarski y Vaught, en donde por vez primera se define la verdad en un sistema.

---

* Véase «Truth in a structure» de W. Hodges y «Logic in the twenties. The Nature of the Quantifiers» de W. D. Goldfarb.

1. LENGUAJE DE PRIMER ORDEN ADECUADO A UN SISTEMA

Para hablar de un sistema $\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{f}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j \in J} \rangle$ de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$, introducimos un lenguaje $L(\mathscr{A})$, de primer orden, adecuado a $\mathscr{A}$. En $L(\mathscr{A})$ tendremos, como signos peculiares, tantos functores como funciones haya en $\mathscr{A}$, y tantos relatores como relaciones tenga $\mathscr{A}$, que serán, además, del grado apropiado. De hecho, el lenguaje $L(\mathscr{A})$ será igualmente adecuado para hablar de cualquier otro sistema de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$: La función que a cada sistema le asigna su lenguaje dista de ser inyectiva.

1.1. Alfabeto

En el alfabeto de $L(\mathscr{A})$ aparecerán dos clases de signos: los comunes a todos los lenguajes de primer orden y los específicos de $L(\mathscr{A})$. Concretamente, contaremos con los signos siguientes.

i) Signos lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =$. Los cinco primeros signos son los conectores cuyos nombres son: negador, conyuntor, disyuntor, condicionador y bicondicionador. Estos signos servirán para expresar negación, conyunción, etc. A continuación vienen los cuantificadores: generalizador y particularizador. He incluido el igualador entre los signos lógicos porque todos los lenguajes de primer orden que utilizaremos lo tendrán. Dicho signo expresará identidad y es un relator binario.

ii) Variables individuales: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ En los lenguajes de primer orden la provisión de variables es infinito-numerable, sirviendo éstas para referirse indistintamente a individuos y para dar cauce a la cuantificación.

iii) Functores. Para cada $i \in I$, f_i será un fuctor $\mu(i)$-ario que servirá para hablar de la función del sistema que ocupa la posición iésima; en nuestro caso, la $\mathbf{f}_i$. Podemos ordenar los functores de $L(\mathscr{A})$ y escribirlos así: $\langle f_i \rangle_{i \in I}$.

iv) Relatores. Para cada $j \in J$, R_j será un relator $\delta(j)$-ario de $L(\mathscr{A})$. Ordenando mediante δ los relatores podemos escribirlos así: $\langle R_j \rangle_{j \in J}$.

v) Paréntesis. Como signos auxiliares, en nuestro lenguaje tendremos paréntesis: (,).

NOTA 1

Utilizo el mismo signo, «=», en el lenguaje y en el metalenguaje. En el primer caso forma parte del alfabeto de L y es un relator binario que junto con los términos t_1 y t_2 nos permite formar igualdades, $t_1 = t_2$, que son fórmulas de L. En el segundo caso expresa la genuina relación de identidad; que se da únicamente entre un objeto y él mismo, no tienen porqué confundirse, el contexto hablará.

Utilizo también $\equiv$ en definiciones.

NOTA 2

Los signos peculiares de $L(\mathscr{A})$ forman el par $\langle \langle f_i \rangle_{i \in I}, \langle R_j \rangle_{j \in J} \rangle$ ordenados por las funciones μ y δ.

Por analogía con la definición del tipo de un sistema, podemos definir el de un lenguaje formal: $L(\mathscr{A})$ será de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$.

NOTA 3

De forma similar a como lo hicimos para sistemas, podemos definir la noción de expansión y reducción de un lenguaje: se trata simplemente de poner o quitar signos peculiares.

Para indicar que L^* es una expansión de L escribiremos: $L \subseteq L^*$. Dado un sistema $\mathscr{A}$ y su lenguaje apropiado, $L(\mathscr{A})$, al expandir el sistema destacando los individuos de la sucesión $\bar{a}$ —es decir, al construir $\langle \mathscr{A}, \bar{a} \rangle$— necesitamos un nuevo lenguaje apropiado al nuevo sistema. En dicho lenguaje, el $L(\langle \mathscr{A}, \bar{a} \rangle)$, tendremos nombres para cada uno de los individuos que integran la sucesión $\bar{a}$. Cuando tengamos un lenguaje y hagamos una expansión añadiendo las constantes de la sucesión $\bar{c}$, escribiremos $L \cup \bar{c}$.

1.2. Términos y fórmulas

Las sucesiones finitas de signos del alfabeto son filas de signos, pero no todas nos interesan; queremos seleccionar de entre ellas los términos y fórmulas. Por ejemplo, queremos que las filas de signos $R_j x_1 \ldots x_{\delta(j)}$, $\forall x_1 f_i x_1 \ldots x_{\mu_{(i)}} = f_k x_1 \ldots x_{\mu(k)}$ y $\forall x \exists y\, x = y$ sean fórmulas, pero que no lo sean: $\rightarrow = f_i x_1$, $f_i x_1 \ldots x_{\mu(i)} \vee R_j x_1 \ldots x_{\delta(j)}$.

La fórmula $f_i x_1 \ldots x_{\mu(i)} = f_k x_1 \ldots x_{\mu(k)}$ es una ecuación. A izquierda y derecha del igualador aparecen términos. Para definir con precisión el concepto de término lo que hacemos es proporcionar instrucciones (o reglas) que nos dicen cómo generarlos. Del mismo modo definimos a las fórmulas. Veamos cómo.

1.2.1. *Definición*

Llamaremos términos a las filas de signos obtenidas mediante aplicaciones (en número finito) de las reglas siguientes:

T1. Cualquier variable individual es un término.

T2. Para cada $i \in I$ y cada sucesión de $\mu(i)$ términos $\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}$, $f_i \tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}$ es un término. Se incluyen aquí las constantes individuales o functores ceroarios ($\mu(i) = 0$) que son términos natos.

TER(L) —términos de L— es el menor conjunto que se puede construir mediante las reglas T1 y T2. □

1.2.2. *Definición*

Llamaremos fórmulas a las filas de signos obtenidas por aplicación sucesiva y finita de las reglas siguientes:

F1. Para cada $j \in J$ y cada sucesión de $\delta(j)$ términos $\tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)}$, $R_j\tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)}$ es una fórmula. En especial, si τ_1 y τ_2 son términos, $\tau_1 = \tau_2$ es una fórmula.

F2. Si φ es una fórmula, entonces $\neg\varphi$ también.

F3. Si φ y ψ son fórmulas, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas.

F4. Si φ es una fórmula, entonces $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$ son también fórmulas.

FOR(L) —fórmulas de L— es el menor conjunto que se puede construir mediante las reglas F1 – F4. □

1.3. Convenciones notaciones

1.3.1. *Supresión de paréntesis*

Al escribir fórmulas intentaremos aliviarlas de paréntesis. Las reglas que nos permitirán suprimir algunos de ellos son las siguientes:

i) Los paréntesis externos de una fórmula pueden suprimirse. Así:

En vez de $(\alpha \wedge \beta)$ escribiremos $\alpha \wedge \beta$,
en vez de $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \gamma)$ escribiremos $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge \gamma$
y en vez de $((\alpha \wedge \beta) \wedge (\gamma \wedge \delta))$ escribiremos, $(\alpha \wedge \beta) \wedge (\gamma \wedge \delta)$.

ii) En los casos de iterada conyunción o disyunción, la regla es la de asociación por la izquierda. Así:

En vez de $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ escribiremos $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$
y en vez de $(((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \vee \delta) \vee \varrho$ escribiremos $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \delta \vee \varrho$.

iii) Conyuntor y disyuntor ligan más que condicionador y bicondicionador. Así:

En vez de $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$ escribiremos $\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$
y en vez de $\alpha \leftrightarrow ((\beta \wedge \delta) \leftrightarrow \gamma)$ escribiremos $\alpha \leftrightarrow (\beta \wedge \delta \leftrightarrow \gamma)$.

1.3.2. *Otras abreviaturas*

a) Una secuencia de cuantificación repetida, $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3$ (o $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3$), puede simplificarse $\forall x_1 x_2 x_3$ (o $\exists x_1 x_2 x_3$).
Así:

En vez de $\forall x \forall y \forall z\varphi$ escribiremos $\forall xyz\varphi$
y en vez de $\forall x \forall y \exists z \exists v (\varphi \rightarrow \forall u\psi)$ escribiremos $\forall xy \exists zv (\varphi \rightarrow \forall u\psi)$.

b) Abreviaremos la negación de una igualdad escribiendo

$$x \neq y \text{ en vez de } \neg x = y.$$

c) Para expresar la repetida conyunción (o disyunción) de las fórmulas de un conjunto finito Γ escribiremos $\bigwedge_{\varphi \in \Gamma} \varphi$ (o $\bigvee_{\varphi \in \Gamma} \varphi$).

d) En ocasiones, la conyunción o disyunción repetida la expresaremos utilizando un conjunto de índices: $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ (o $\bigvee_{i \in I} \varphi_i$).

e) Además de las abreviaturas mencionadas, cuando el peso de la tradición sea muy fuerte y la notación introducida vaya en detrimento de la claridad, la abandonaremos en favor de la antigua: por ejemplo, al hablar de grupos y anillos introduciremos a veces $+$ y $\cdot$ como functores binarios, al hablar de órdenes introduciremos $\leq$ como relator binario y en ambos casos situaremos el signo entre los términos —es decir; $t_1 + t_2$ o $t_1 \leq t_2$—. Tendremos también que añadir paréntesis para que las fórmulas no sean ambiguas porque cuando se sitúan los functores y relatores seguidos de sus términos no hay más que una lectura posible: en g^2xf^2yz está claro que el functor binario g^2 se aplica a dos términos, siendo x el primero y f^2yz el segundo. Sin embargo, si escribiéramos $x \cdot y + z$ no se sabría si es el producto de x por $y + z$ o la suma de $x \cdot y$ con z. Por ello hace falta poner paréntesis: $x \cdot (y + z)$ o, en otro caso, dar unas normas de lectura que nos permitieran leer e interpretar $x \cdot y + z$ de una sola manera.

1.4. *Ejemplos*

1) Para hablar acerca de los sistemas $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$, $\langle \mathcal{P}\mathbb{N}, \varnothing, \Delta \rangle$ y $\langle \mathbb{Z}_5, \bar{0}, + \rangle$ precisamos un lenguaje de tipo $\langle 0,2; \varnothing \rangle$. En él tendremos únicamente dos signos peculiares que son un functor cerоario y otro binario: e y f. Este lenguaje nos servirá para hablar de cualquier sistema de tipo $\langle 0,2; \varnothing \rangle$ y, en particular, de cualquier grupo.

He aquí algunas de sus fórmulas:

$$\alpha_1 = \forall xyz\ fxfyz = ffxyz$$

$$\alpha_2 = \forall x(fxe = x \wedge fex = x)$$

$$\alpha_3 = \forall x \exists y\ fxy = e$$

$$\beta_1 = \forall x\ fxe = e$$

$$\beta_2 = \forall xy\ fxy = fyx$$

Si lo que queremos es un lenguaje para hablar de grupos únicamente, podemos tomar $+$ en lugar de f. Evidentemente, estas fórmulas se leerán mejor teniendo a $+$ como functor binario y situándolo entre —y no delante de— los términos con los que opera. Según esta convención α_1 se escribirá:

$$\forall xyz\ x + (y + z) = (x + y) + z$$

Como veis, hace falta introducir paréntesis.

2) Para hablar del sistema $\langle \mathcal{P}A, \subseteq \rangle$ o de $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ precisamos un lenguaje de tipo $\langle \emptyset; 2 \rangle$. Nos servirá, por consiguiente, uno que sólo contenga un relator binario, R, como signo peculiar.

Algunas fórmulas de este lenguaje son las siguientes:

$$\gamma_1 \equiv \forall x\, Rxx$$

$$\gamma_2 \equiv \forall xy(Rxy \wedge Ryx \rightarrow x = y)$$

$$\gamma_3 \equiv \forall xyz(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$$

$$\gamma_4 \equiv \forall xy\, (Rxy \vee Ryx)$$

$$\varrho_1 \equiv \forall x \exists y\, Rxy$$

$$\varrho_2 \equiv \forall x \exists y\, (x \neq y \wedge Rxy)$$

También aquí se entienden mejor las fórmulas cuando escribimos el relator entre los términos y en vez de R usamos $\leq$.

γ_1 sería $\forall x\; x \leq x$
γ_2 sería $\forall xy\, (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$

3) Para hablar acerca del sistema $\langle \mathbb{N}, 0, S \rangle$ necesitamos un lenguaje con un functor ceroario y otro monario: a, f. Con él podemos construir las fórmulas siguientes:

$$\delta_1 \equiv \forall x\; a = fx$$

$$\delta_2 \equiv \forall xy\; fx = fy$$

$$\delta_3 \equiv \forall xy(x \neq y \rightarrow fx \neq fy)$$

$$\delta_4 \equiv \forall x \exists y\; x = fy$$

NOTA

Las reglas T1, T2, F1, F2, F3 y F4 constituyen el cálculo de términos y fórmulas. Dicho cálculo es decidible; es decir, dado un lenguaje L y una sucesión σ de signos de L se puede determinar, en un número finito de pasos, si $\sigma \in$ TER(L) (o si $\sigma \in$ FOR(L)) o no.

Por ejemplo $\alpha_3 \in$ FOR(L) siendo L el lenguaje del ejemplo 1. ¿Cómo lo demostramos?, pues utilizando el cálculo de términos y fórmulas. Veamos el modo:

1) x e y son términos (T1).

2) fxy es un término (T2 y línea 1).

3) e es un término (T2).

4) $fxy = e$ es una fórmula (F1 y líneas 2 y 3).

5) $\exists y\, fxy = e$ es una fórmula (F4 y línea 4).

6) $\forall x \exists y\, fxy = e$ es una fórmula (F4 y línea 5).

Por consiguiente, $\alpha_3 \in$ FOR(L).

1.5. Inducción

Antes de finalizar esta breve exposición del lenguaje de primer orden, comentaré algunos aspectos. La definición de términos y fórmulas realizada aquí es inductiva, apoyándose en los principios de inducción aritmética que aceptamos. Dicho principio lo podemos formular así: si algo vale para cualquier número natural n —suponiendo que vale para todos los naturales menores que n— entonces vale para todos los números naturales.

Es evidente que el conjunto de términos y el de las fórmulas de nuestro lenguaje es infinito. Por consiguiente, cuando queramos demostrar que todos los términos (o fórmulas) tienen una propiedad, o cuando queramos definir algún concepto para cada término o fórmula, lo que haremos es realizar una prueba (en su caso, definición) por inducción semiótica sobre la formación de los términos o sobre la de las fórmulas.

1.5.1. *Demostraciones por inducción semiótica*

Concretamente, si queremos demostrar que todos los términos tienen la propiedad **P**, es suficiente con demostrar que:

(T1)′. Cada variable tiene la propiedad **P**.

(T2)′. Si los términos $\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}$ tienen la propiedad **P**, entonces $f_i\, \tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}$ tiene la propiedad **P**.

Cuando queramos demostrar que todas las fórmulas tienen la propiedad **Q**, las condiciones serán:

(F1)′. Todas las fórmulas simples: $R_j \tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)}$, $\tau_1 = \tau_2$ tienen la propiedad **Q**, suponiendo que $\tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)}$ tienen la **P**.

(F2)′. Si φ tiene la propiedad **Q**, entonces $\neg\varphi$ tiene la propiedad **Q**.

(F3)′. Si φ y ψ tienen la propiedad **Q**, entonces $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$ tienen la propiedad **Q**.

(F4)′. Si φ tiene la propiedad **Q**, entonces $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$ tienen la propiedad **Q**, siendo x una variable.

Parece razonable pensar que si se cumplen (T1)', (T2)', (F1)', (F2)', (F3)', y (F4)' para unas ciertas propiedades **P** y **Q**, entonces habremos demostrado que todo término $\tau \in$ TER(L) tiene la propiedad **P** y que cada fórmula $\varphi \in$ FOR(L) tiene la propiedad **Q**. Además de razonable, ¿es justificable utilizando principios aceptados por nosotros? La respuesta, como podéis suponer, es que sí. El esquema de la demostración de que usando el principio de inducción aritmética se justifican las demostraciones por inducción sobre la formación de términos y fórmulas es así:

Definamos primero el concepto de longitud de una fila de signos como el número de signos que la integran. Evidentemente cada término y cada fórmula tendrá una longitud finita, n. El razonamiento es como sigue: Si **P** y **Q** son propiedades tales que (T1)', (T2)', (F1)', (F2)', (F3)' y (F4)', entonces por inducción sobre n se demuestra que cada término o fórmula de longitud n tiene la propiedad **P** o **Q**. Puesto que cada elemento de TER(L) y de FOR(L) tiene una cierta longitud n, entonces hemos demostrado que cada término tiene la propiedad **P** y cada fórmula la propiedad **Q**.

Como sucede en la aritmética, la inducción no sólo se utiliza para probar teoremas acerca de todos los naturales, sino que también se utiliza para definir conceptos. El esquema de las definiciones por inducción es el esperado: empezar por los términos (o fórmulas) simples y suponiéndolo definido para términos y fórmulas cualesquiera, hacerlo para los que resulten por las reglas T2, F2, F3 y F4.

Puesto que en la definición de un concepto —por ejemplo, una función **H**: TER(L) $\rightarrow$ **B**— queremos que a cada término se le asigne un único valor y nuestra definición de **H** se apoya en la de construcción de términos, hemos de asegurarnos de que los términos no se puedan construir de varias maneras diferentes no vaya a suceder que con cada una de esas maneras se asocie distinto valor al término. Es decir, es preciso que se pueda demostrar que cada término o fórmula de un cierto lenguaje L puede construirse de una sola manera. Este teorema, que no demostraré, se formula así:

a) Cada término es o bien una variable o bien de la forma $f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}$. En el último caso f y los términos $\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}$ están unívocamente determinados.

b) Cada fórmula es de una de las formas siguientes:

1) $\mathbf{R}_j\tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)}$, 2) $\tau_1 = \tau_2$, 3) $\neg\varphi$, 4) $\varphi \wedge \psi$, 5) $\varphi \vee \psi$, 6) $\varphi \rightarrow \psi$, 7) $\varphi \leftrightarrow \psi$, 8) $\forall x\varphi$ y 9) $\exists x\varphi$, donde los casos 1) a 9) son mutuamente excluyentes y están unívocamente determinados los términos, relatores, variables y fórmulas que aparecen de 1) a 9) —es decir, $\tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)}$ y $\mathbf{R}_j$ en 1), φ y ψ en 2), 3, ..., 9) y x en 8) y 9)—.

1.5.2. *Definiciones por inducción semiótica*

Si queremos definir un concepto **C** para cada término y un concepto **K** para cada fórmula, es suficiente con:

(T1)". Definir **C** para cada variable.

(T2)". Definir **C** para $f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}$, suponiendo que ya está definido para $\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}$.

(F1)". Definir **K** para las fórmulas simples: $R_j\tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)}$ y $\tau_1 = \tau_2$.

(F2)". Definir **K** para $\neg\varphi$, supuesto que lo está para φ.

(F3)". Definir **K** para $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$ supuesto que lo está para φ y ψ.

(F4)". Definir **K** para $\forall x\varphi$ y $\exists x\varphi$, supuesto que está definido para φ.

La justificación de las definiciones por inducción semiótica es el *Teorema de la unicidad de la construcción de términos y fórmulas*. Con su ayuda se puede demostrar que si **C** y **K** son conceptos definidos mediante (T1)" a (F4)", entonces cada término $\tau \in$ TER(L) tiene asociado un único valor mediante **C** y cada fórmula $\varphi \in$ FOR(L) un único valor mediante **K**.

1.6. Estancia libre y ligada

Consideremos la fórmula siguiente:

$$\varphi = \forall x(R\underline{y}\,\underline{z} \rightarrow \exists z(R\underline{\underline{x}}\,\underline{\underline{z}} \wedge \neg R\underline{\underline{x}}\,\underline{y}))$$

en ella las estancias de las variables y y z marcadas con una sola línea son libres; es decir, no están en el alcance de ningún cuantificador, hacen el papel de parámetros. Las estancias de x y z marcadas con doble línea son estancias ligadas.

Ahora definamos por inducción para cada término τ y fórmula φ el conjunto de las variables libres en τ o en φ. Es decir, definiremos una función LBR que a cada elemento de TER(L) $\cup$ FOR(L) le asigna un valor en $\mathcal{P}\mathcal{V}$ —siendo $\mathcal{V}$ el conjunto de las variables del lenguaje—. No se trata, pues, de la definición de la estancia libre de una variable x en una fórmula.

Definición

LBR(x) = $\{x\}$.

LBR($f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}$) = LBR($\tau_1$) $\cup \ldots \cup$ LBR($\tau_{\mu(i)}$). (En especial, LBR(f^0) = $\varnothing$).

LBR($R_j\tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)}$) = LBR($\tau_1$) $\cup \ldots \cup$ LBR($\tau_{\delta(j)}$).

LBR($\neg\varphi$) = LBR(φ).

LBR($\varphi \,\square\, \psi$) = LBR(φ) $\cup$ LBR(ψ) donde $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

LBR($\forall x\varphi$) = LBR($\exists x\varphi$) = LBR(φ) $-$ $\{x\}$. $\square$

En lo sucesivo, llamaremos designadores a los términos cuyo conjunto de variables libres es $\varnothing$, y sentencias a las fórmulas que cumplan que LBR(φ) = $\varnothing$. Por lo que dije

anteriormente, está claro que lo que caracteriza a las sentencias es carecer de parámetros.

$\forall xy\ Rxy$ es una sentencia, mientras que $\exists x\ fx = z$ es una fórmula abierta, z es un parámetro en ella.

Una variable está ligada en una fórmula cuando está en el alcance de algún cuantificador. Sin embargo, una misma variable puede estar libre y ligada en una fórmula. Por ejemplo, en la fórmula

$$Rxy \to \forall y Sy$$

la variable «y» está libre y ligada.

Notación

a) Si L es un lenguaje de primer orden, SEN(L) es el conjunto de las sentencias de L.

b) Para indicar que la variable x está libre en la fórmula φ escribiremos $\varphi(x)$. En general, $\varphi(x_1 \ldots x_n)$ indica que $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathrm{LBR}(\varphi)$.

c) Para indicar que las variables libres de φ están, por orden de lectura izquierda —derecha—, entre las que forman la sucesión $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, escribiremos $\varphi\langle x_1 \ldots x_n\rangle$. Esto es lo mismo que decir que en φ están libres a lo sumo $x_1, \ldots, x_n$ y que el orden de aparición en φ respeta el de la sucesión.

d) Si Γ es un conjunto de fórmulas, $\mathrm{LBR}(\Gamma) = \bigcup_{\varphi\in\Gamma}\mathrm{LBR}(\varphi)$.

1.7. *Ejercicios*

1) Sea L un lenguaje sin signos peculiares; es decir, de tipo $\langle\varnothing; \varnothing\rangle$. ¿Es infinito el conjunto de fórmulas de L?

2) Demostrad que $\forall xy(Rxy \to \neg Rxy)$ es una fórmula del lenguaje adecuado a $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$. Es decir, que ha sido construida conforme a las reglas del cálculo de términos y fórmulas.

3) Definid inductivamente la función LGD que a cada término o fórmula de L le asigna el conjunto de las variables ligadas en él.

4) Encontrad 5 fórmulas tales que $\mathrm{LBR}(\varphi) \cap \mathrm{LGD}(\varphi) \neq \varnothing$.

5) *Definid inductivamente la función SF que a cada fórmula de L le asigna el* conjunto de sus subfórmulas —una subfórmula de φ es una parte de φ que es ella misma una fórmula—.

Problema 1

Justificad el esquema de las demostraciones por inducción semiótica. Es decir, probad el teorema siguiente:

Teorema de la inducción semiótica

Sean **P** y **Q** propiedades cualesquiera
Si (T1)', (T2)', (F1)', (F2)', (F3)' y (F4)' se verifican respecto de **P** y **Q**, entonces

todo término $\tau \in$ TER(L) tiene **P**.
toda fórmula $\varphi \in$ FOR(L) tiene **Q**.

Problema 2

Sea L un lenguaje de primer orden cuyo conjunto de signos peculiares es numerable. Demostrad que el conjunto formado por las filas de signos de L es infinito-numerable. Para simplificar, pongamos $L = \{l_0, l_1, l_2, \ldots\}$ donde cada l_i es un signo cualquiera de L: signo lógico, paréntesis, variable o signo peculiar.

2. INTERPRETACION DE UN LENGUAJE EN UN SISTEMA

Sea $\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{f}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j \in J} \rangle$ un sistema de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$ y sea L un lenguaje de primer orden adecuado a $\mathscr{A}$.

Automáticamente, los designadores de L adquieren denotación en $\mathscr{A}$ y las sentencias de L se convierten en verdaderas o falsas en $\mathscr{A}$. La idea es muy simple: los functores y relatores del lenguaje se interpretan como las funciones y relaciones del sistema de igual subíndice. Por otra parte, las fórmulas simples se interpretan a la manera conjuntista —es decir, la fórmula Ra sera verdadera si el individuo del sistema que corresponde a la constante «a» pertenece a la relación monaria que corresponde al relator «R». La cuantificación se considera referida a todos los individuos del universo del sistema. Así, la fórmula $\forall x\, Rxx$ es verdadera en $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ mientras que $\forall xy\, (Rxy \to Ryx)$ es falsa en él.

Precisando, en $\mathscr{A}$ se interpretan los functores y relatores de L del siguiente modo:

i) Para cada $i \in I$: $\mathscr{A}(f_i) = \mathbf{f}_i$.

ii) Para cada $j \in J$: $\mathscr{A}(R_j) = \mathbf{R}_j$.

Para fijar los valores de las variables necesitamos las asignaciones, que son funciones que a cada una de ellas le asocia un individuo del universo del sistema. ($\mathscr{I}: \mathcal{V} \to \mathbf{A}$). Dada una asignación, una variable y un individuo del universo del sistema, definimos la asignación variante $\mathscr{I}^{\mathbf{x}}_x$, que coincide con $\mathscr{I}$ en todo, excepto en el valor de la variable x.

$$\mathscr{I}^{\mathbf{x}}_x = (\mathscr{I} - \{\langle x, \mathscr{I}(x)\rangle\}) \cup \{\langle x, \mathbf{x}\rangle\}$$

Al introducir las asignaciones permitimos que todos los términos denoten individuos del sistema y que todas las fórmulas adquieran valor de verdad. Por inducción definiré el concepto de interpretación de términos y fórmulas.

2.1. Definición de interpretación

Dados un sistema $\mathscr{A}$ y una asignación $\mathscr{I}$, definimos la interpretación $\mathscr{A}\mathscr{I}$ de este modo:

$$\mathscr{A}\mathscr{I}(x) = \mathfrak{I}(x)$$

$$\mathscr{A}\mathscr{I}(f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}) = \mathfrak{f}_i(\mathscr{A}\mathscr{I}(\tau_1), \ldots, \mathscr{A}\mathscr{I}(\tau_{\mu(i)}))$$

$$\mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } R_j\tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)} \text{ syss } \langle \mathscr{A}\mathscr{I}(\tau_1), \ldots, \mathscr{A}\mathscr{I}(\tau_{\delta(j)})\rangle \in \mathbf{R}_j$$

$$\mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \tau_1 = \tau_2 \text{ syss } \mathscr{A}\mathscr{I}(\tau_1) = \mathscr{A}\mathscr{I}(\tau_2)$$

$$\mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \neg\varphi \text{ syss no } \mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \varphi$$

$$\mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } (\alpha \wedge \beta) \text{ syss } \mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \alpha \text{ y } \mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \beta$$

$$\mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } (\alpha \vee \beta) \text{ syss } \mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \alpha \text{ o } \mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \beta$$

$$\mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } (\alpha \rightarrow \beta) \text{ syss, si } \mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \alpha \text{ entonces } \mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \beta$$

$$\mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } (\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ syss: } \mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \alpha \text{ syss } \mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \beta$$

$$\mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \forall x\varphi \text{ syss para cada } \mathbf{x} \in \mathbf{A}\text{: } \mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathbf{x}}_{x} \text{ sat } \varphi$$

$$\mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \exists x\varphi \text{ syss para algún } \mathbf{x} \in \mathbf{A}\text{: } \mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathbf{x}}_{x} \text{ sat } \varphi$$

Cuando $\mathscr{A}\mathscr{I}$ sat φ decimos también que $\mathscr{A}\mathscr{I}$ es un modelo de φ. Si se tratara de una sentencia, simplemente diríamos que $\mathscr{A}$ es modelo de φ, o que φ es verdadera en $\mathscr{A}$. El motivo por el que se puede prescindir de la asignación en este caso se clarificará en cuanto demostremos el teorema de coincidencia.

También decimos que una interpretación $\mathscr{A}\mathscr{I}$ es un modelo de un conjunto de fórmulas, Γ. En este caso lo que queremos expresar es que para cada $\varphi \in \Gamma$, $\mathscr{A}\mathscr{I}$ sat φ. □

Notación

i) Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje L de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$. MOD($\Sigma$) es la clase de todos los sistemas de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$ que sean modelo de Σ.

ii) Sea $\mathscr{A}$ un sistema, $\varphi\langle x_1 \ldots x_n \rangle \in$ FOR(L($\mathscr{A}$)) —es decir, LBR(φ) $\subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ y el orden de aparición es el marcado por la sucesión $\langle x_1 \ldots x_n \rangle$— y sean $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$ individuos del universo del sistema. Sea $\mathscr{I}$ una asignación cualquiera. Escribiremos $\mathscr{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$ sat φ en vez de $\mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}_{x_1 \ldots x_n}$ sat φ. La justificación de esta notación es el teorema de coincidencia (II.4.1).

Podemos ahora introducir el concepto clave de la semántica lógica: el de consecuencia.

2.2. Definición de consecuencia

Decimos que una fórmula φ es consecuencia de un conjunto de fórmulas Γ, si cada interpretación que es modelo de Γ, lo es también de φ. Es decir, para cada sistema $\mathcal{A}$ y asignación $\mathcal{I}$ se cumple que si para cada $\alpha \in \Gamma$: $\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat α, entonces $\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat φ. Abreviadamente escribiremos $\Gamma \models \varphi$ para indicar que φ es una consecuencia de Γ. □

Cuando φ no es consecuencia de Γ decimos que es independiente de Γ y escribiremos $\Gamma \not\models \varphi$. □

Utilizando el concepto de consecuencia podemos definir los de validez y equivalencia lógica.

2.3. Definición de validez

Decimos que una fórmula φ es válida cuando $\varnothing \models \varphi$; es decir, en todo sistema $\mathcal{A}$ y asignación $\mathcal{I}$ se cumple que $\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat φ. □

Cuando φ sea una fórmula válida escribiremos: $\models \varphi$.

2.4. Definición de satisfacibilidad

Una fórmula φ es satisfacible syss hay al menos una interpretación $\mathcal{A}\mathcal{I}$ que es modelo de φ. Por otra parte, un conjunto de fórmulas Γ es satisfacible syss hay al menos una interpretación $\mathcal{A}\mathcal{I}$ que es modelo de cada una de las fórmulas de Γ. En caso contrario decimos que φ (o que Γ) es insatisfacible. □

2.5. Definición de equivalencia lógica

Dos fórmulas φ y ψ son lógicamente equivalentes syss $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \varphi$.

Por consiguiente, dos fórmulas φ y ψ son lógicamente equivalentes si son simultáneamente verdaderas o falsas en todas sus posibles interpretaciones; es decir, $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

Notación

Para indicar que φ y ψ no son lógicamente equivalentes escribiremos: $\not\models \varphi \leftrightarrow \psi$.

2.6. Sustitución

En este apartado definiré la operación de sustitución, que a cada triplete formado por una variable, un término y una fórmula le asigna otra fórmula: resultado de sustituir en la primera la variable por el término. Siendo φ la fórmula, x la variable y τ el término, la sustitución nos permite conseguir una fórmula en la que lo que decíamos sobre x ahora lo decimos de τ. No queremos sustituir variables ligadas ni tampoco queremos que el sentido de φ cambie.

Sea $\varphi = \forall x\, Rxy$.

En el modelo $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ esta fórmula afirma que $\mathcal{I}(y)$ es mayor que todos los naturales. Evidentemente esta fórmula es falsa por carecer $\mathbb{N}$ de cota superior. Si sustituimos y por z obtenemos la fórmula $\forall x\, Rxz$, que dice lo mismo respecto de z, y que continuará siendo falsa. Suponed que sustituimos y por x: la fórmula $\forall x\, Rxx$ dice que la relación $\leq$ es reflexiva, algo evidentemente cierto. No queremos que la sustitución altere el valor de verdad de las fórmulas, lo que haremos es cambiar primero x por una variable nueva —z, por ejemplo— y después sustituir y por x. El resultado será $\forall z\, Rzx$, fórmula que no altera el valor de verdad original.

2.6.1. *Definición*

$$\mathbf{S}_x^\tau (z) = \begin{cases} \tau, \text{ si } x = z \\ z, \text{ si } x \neq z \end{cases}$$

$$\mathbf{S}_x^\tau (f_i\tau_1 \dots \tau_{\mu(i)}) = f_i\, \mathbf{S}_x^\tau \tau_1 \dots \mathbf{S}_x^\tau \tau_{\mu(i)}$$

$$\mathbf{S}_x^\tau (R_j\tau_1 \dots \tau_{\delta(j)}) = R_j\, \mathbf{S}_x^\tau \tau_1 \dots \mathbf{S}_x^\tau \tau_{\delta(j)}$$

$$\mathbf{S}_x^\tau (\tau_1 = \tau_2) = \mathbf{S}_x^\tau \tau_1 = \mathbf{S}_x^\tau \tau_2$$

$$\mathbf{S}_x^\tau \neg \varphi = \neg \mathbf{S}_x^\tau \varphi$$

$$\mathbf{S}_x^\tau (\varphi \Box \psi) = \mathbf{S}_x^\tau \varphi \Box \mathbf{S}_x^\tau \psi \text{ (donde } \Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\})$$

$$\mathbf{S}_x^\tau (\forall z\varphi) = \begin{cases} \forall z\varphi, \text{ si } x \notin \text{LBR}(\forall z\varphi) \\ \forall z\, \mathbf{S}_x^\tau \varphi, \text{ si } x \in \text{LBR}(\forall z\varphi) \text{ y } z \notin \text{LBR}(\tau) \\ \forall v\, \mathbf{S}_x^\tau \mathbf{S}_z^v \varphi, \text{ si } \begin{cases} x \in \text{LBR}(\forall z\varphi) \text{ y } z \in \text{LBR}(\tau) \\ \text{y } v \text{ es una variable nueva.} \end{cases} \end{cases}$$

De forma similar para $\exists x\varphi$. □

2.6.2. *Sustitución simultánea*

De forma similar se puede definir la sustitución simultánea para reemplazar de una vez varias variables por términos. La definición será por inducción semiótica: para términos y para fórmulas.

$$\mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, x = \begin{cases} x, \text{ si } x \not\equiv x_1, \ldots, x \not\equiv x_n \\ \tau_i, \text{ si } x \equiv x_i \text{ para algún } i,\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$\mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, f_i t_1 \ldots t_{\mu(i)} \equiv f_i\, \mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, t_1 \ldots \mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, t_{\mu(i)}$$

$$\mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, \mathrm{R}_j t_1 \ldots t_{\delta(j)} \equiv \mathrm{R}_j\, \mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, t_1 \ldots \mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, t_{\delta(j)}$$

En especial,

$$\mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, (t_1 = t_2) \equiv \mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, t_1 = \mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, t_2$$

$$\mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, (\neg\varphi) \equiv \neg\, \mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, \varphi$$

$$\mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, (\varphi \vee \psi) \equiv \mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, \varphi \vee \mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{\tau_1 \ldots \tau_n}\, \varphi$$

La definición de la sustitución en fórmulas cuantificadas os la dejo como ejercicio. Tened en cuenta que sólo debemos sustituir, las $x_i \in \mathrm{LBR}(\varphi)$ y $x_i \not\equiv \tau_i$. □

Notación

i) Pondremos a veces $\varphi(c)$, siendo c un functor ceroario. Esto es una abreviatura de $\mathbf{S}_x^c\, \varphi(x)$. Puesto que, como recordareis, $\varphi(x)$ indica que $x \in \mathrm{LBR}(\varphi)$, $\varphi(c)$ será el resultado de borrar x y poner c en su lugar.

ii) Para expresar la cuantificación «existe un sólo elemento tal que φ» —siendo φ una fórmula—, escribiremos: $\exists^1 x\varphi$ —que leeremos: «hay un único x tal que φ»—. Esta fórmula es una abreviatura de:

$$\exists x\, (\varphi \wedge \forall y\, (\mathbf{S}_x^y\, \varphi \to x = y)) \text{ —siendo } y \not\equiv x,\ y \notin \mathrm{LBR}(\varphi)\text{—}$$

2.7. Extensión mediante definición

Sea Γ un conjunto de sentencias de un lenguaje L.

i) Sea R un relator n-ario que no está en L y $\varphi(v_1 \ldots v_n) \in \mathrm{FOR(L)}$ —es decir, $\mathrm{LBR}(\varphi) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$—.

Decimos que

$$\forall v_1 \ldots v_n(Rv_{\sigma(1)} \ldots v_{\sigma(n)} \leftrightarrow \varphi_R\langle v_1 \ldots v_n\rangle)$$

es una definición de R a partir de L en Γ.

ii) Sea f un fuctor n-ario que no está en L y $\varphi\langle v_1 \ldots v_n z\rangle \in$ FOR(L). Decimos que

$$\forall v_1 \ldots v_n z(fv_{\sigma(1)} \ldots fv_{\sigma(n)} = z \leftrightarrow \varphi_f\langle v_1 \ldots v_n z\rangle)$$

es una definición de f en Γ a partir de L, siempre que se demuestre que $\Gamma \vdash \forall v_1 \ldots v_n \exists^1 z\varphi_f$ —donde, como se recordará, $\exists^1 z\varphi$ indica que hay un único elemento que verifica φ—.

En ambos casos σ es una permutación sobre $\{1, \ldots n\}$; es decir, una biyección.

Como os habréis percatado, hay una diferencia fundamental entre la introducción de relatores y functores. En el primer caso a la fórmula $\varphi\langle x_1 \ldots x_n\rangle$ no se le exige vinculación especial con el conjunto Γ mientras que en el segundo sí. El motivo es que un relator se interpreta como una relación y un functor como una función y, en este caso, hace falta que unos ciertos elementos determinen unívocamente al que les corresponde.

Cuando extendemos un lenguaje mediante la definición de nuevos fuctores y relatores pretendemos no añadir al conjunto de sentencias Γ con el que trabajamos ningún teorema esencialmente nuevo. Esto lo que quiere decir es que se trata de una convención de notación, de una especie de abreviatura, y que las consecuencias de Γ, reescritas en el lenguaje primitivo, no se verían incrementadas. Este es el contenido del siguiente teorema.

2.7.1. *Teorema*

Sea L un lenguaje de primer orden, $\Gamma \subseteq$ SEN(L) y sea Δ un conjunto de definiciones en Γ de nuevos relatores y/o functores. Sea L* la expansión de L en la que añadimos los nuevos relatores y functores.

Se cumple que para cada $\psi^*\langle x_1 \ldots x_n\rangle \in$ FOR(L*) hay un $\psi\langle x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}\rangle \in$ FOR(L), siendo σ una permutación sobre $\{1, \ldots, n\}$, tal que:

a) Dado un modelo $\mathcal{A}$ de Γ, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$:

$$\mathcal{A}^*[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \psi^* \text{ syss } \mathcal{A}[\mathbf{x}_{\sigma(1)} \ldots \mathbf{x}_{\sigma(n)}] \text{ sat } \psi$$

(donde $\mathcal{A}^*$ es una expansión de $\mathcal{A}$ que es modelo de Δ).

b) $\Gamma \cup \Delta \models \psi \leftrightarrow \psi^*$.

Demostración

Os la dejo como ejercicio. Tened en cuenta que necesitamos que para cada $\psi^* \in \mathrm{FOR}(\mathrm{L}^*)$ se pueda obtener una fórmula ψ sustituyendo en ψ^* cada término o fórmula simple con algún signo nuevo por una equivalente obtenida de la fórmula que lo define. Hay que tener presente que un término puede alojar varios functores nuevos. Por ejemplo, la fórmula $\psi \equiv \exists x\, fgx = y$, siendo f y g nuevos, podría sustituirse por

$$\exists xuv(\mathbf{S}^{xu}_{v_1v_2}\, \varphi_g \wedge \mathbf{S}^{uv}_{v_1v_2}\, \varphi_f \wedge v = y)$$

La razón es que esta fórmula está diciendo lo mismo que

$$\exists xuv(gx = u \wedge fu = v \wedge v = y)$$

ya que φ_g y φ_f son las definiciones de f y de g; es decir,

$$\forall v_1v_2(fv_1 = v_2 \leftrightarrow \varphi_f\langle v_1v_2\rangle)$$
$$\forall v_1v_2(gv_1 = v_2 \leftrightarrow \varphi_g\langle v_1v_2\rangle)$$

Lo que tendréis que hacer es definir por inducción sobre la construcción de $\mathrm{FOR}(\mathrm{L}^*)$ una función $\Diamond$: $\mathrm{FOR}(\mathrm{L}^*) \to \mathrm{FOR}(\mathrm{L})$. Puesto que en una fórmula simple pueden ocurrir varios signos de $\mathrm{L}^* - \mathrm{L}$, necesitaréis utilizar inducción sobre $m(\psi^*)$: el número de ocurrencias de signos nuevos en ψ^*. ■

2.8. *Ejercicios*

1. Contestad razonadamente sí o no.

a) Si φ es válida, entonces para cada conjunto de fórmulas Γ, $\Gamma \vDash \varphi$.

b) Si Γ es insatisfacible, entonces para cada fórmula φ, $\Gamma \vDash \varphi$.

c) Si $\Gamma \nvDash \varphi$, entonces hay al menos una interpretación $\mathcal{AI}$ que satisface simultáneamente a las fórmulas de Γ y a φ.

d) Para cada fórmula φ y conjunto de fórmulas Γ, $\Gamma \nvDash \varphi$ syss $\Gamma \vDash \neg\varphi$.

2) Demostrad que los sistemas $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$, $\langle \mathcal{P}\mathbb{N}, \varnothing, \Delta \rangle$ y $\langle \mathbb{Z}_5, \bar{0}, + \rangle$ son modelo de las fórmulas α_1, α_2 y α_3 del apartado (II.1.4).

3) Demostrad que $\forall y \exists x\, Rxy \nvDash \exists x \forall y\, Rxy$.

4) Demostrad que $\forall x\, c \neq fx \nvDash \forall xy\, (fx = fy \to x = y)$.

5) Demostrad que $\forall x\, c \neq fx \nvDash \exists xy\, (fx = fy \wedge x \neq y)$.

6) Demostrad que $\forall xy\, (fx = fy \to x = y) \nvDash \forall x\, c \neq fx$.

7) Escribid sentencias verdaderas en algunos de los siguientes sistemas:

a) $\langle \{0\}, 0, \{\langle 0,0 \rangle\} \rangle$.

b) $\langle \mathbb{N}, 0, +, \leqslant \rangle$.

c) $$\left\langle \{0,1,2\},\ f\colon \begin{array}{l} 0 \to 0 \\ 1 \to 0 \\ 2 \to 0 \end{array},\ \{0\} \right\rangle$$

8) Demostrad que toda fórmula sin cuantificadores, α, es lógicamente equivalente a una fórmula en la denominada forma normal conyuntiva, es decir, de la forma

$$(\alpha_1^1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{n_1}^1) \vee \ldots \vee (\alpha_1^m \wedge \ldots \wedge \alpha_{n_m}^m)$$

donde cada α_j^i es una fórmula simple o la negación de una fórmula simple.

9) Demostrad que dados un sistema $\mathcal{A}$ y una asignación $\mathcal{I}$ se cumple:

$\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat $\exists^1 x\varphi$ syss hay exactamente un $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{I}_x^{\mathbf{x}}$ sat φ.

10) Haced las sustituciones indicadas:

a) $\mathbf{S}_x^{fz}(\forall z(\mathrm{R}xz \to \mathrm{R}yx))$

b) $\mathbf{S}_z^{fx}(\forall x\ \mathrm{R}xz \to \neg\exists z\ \mathrm{R}xz)$

c) $\mathbf{S}_x^{fxy}(\forall xy\ \mathrm{R}xy)$

d) $\mathbf{S}_x^{fxy}(\forall y\ \mathrm{R}xy)$

e) $\mathbf{S}_z^{c}(\forall x\exists y(\mathrm{R}xy \wedge \mathrm{S}z \to \mathrm{S}x) \wedge \neg\, \mathrm{S}x)$

11) Completad la definición 2.6.2. Es decir, definid

$$\mathbf{S}_{x_1 \ldots x_n}^{t_1 \ldots t_n}\ \forall x\varphi$$

12) Comprobad, utilizando la definición 2.6.2, que

a) $\mathbf{S}_{xyv}^{uuu}(\exists xy\ (\mathrm{P}xu \wedge \mathrm{P}yv)) = \exists xy\ (\mathrm{P}xu \wedge \mathrm{P}yu)$

b) $\mathbf{S}_{uv}^{vfuv}(\exists xy\ (\mathrm{P}xu \wedge \mathrm{P}yv)) = \exists xy\ (\mathrm{P}xv \wedge \mathrm{P}yfuv)$

c) $\mathbf{S}^{uxfuv}_{xuv}(\exists xy\ (Pxu \wedge Pyv)) = \exists wy\ (Pwx \wedge Pyfuv)$

d) $\mathbf{S}^{xfxy}_{xu}(\forall x \exists y (Pxy \wedge Pxu) \vee \exists ufuu = x) = \forall v \exists w\ (Pvw \wedge Pvfxy) \vee \exists\, ufuu = x$.

13) Demostrad que

a) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$
b) $\not\models \exists x\varphi \wedge \exists x\psi \rightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi)$

14) Demostrad

a) Si $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \subseteq \Phi$ entonces $\Phi \models \varphi$

b) Si $\Gamma\psi \models \varphi$ y $\Gamma \neg \psi \models \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$

c) Si $\Gamma \neg \varphi \models \psi$ y $\Gamma \neg \varphi \models \neg \psi$ entonces $\Gamma \models \varphi$

d) Si $\Gamma\varphi \models \gamma$ y $\Gamma\psi \models \gamma$ entonces $\Gamma\varphi \vee \psi \models \gamma$

e) Si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ y $\Gamma \models \psi \vee \varphi$

Donde $\Gamma \subseteq$ FOR(L) y $\Gamma\varphi_1 \ldots \varphi_n$ es una abreviatura de $\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$.

15) Demostrad

a) $\models \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \neg (\neg \psi \vee \neg \psi)$

b) $\models (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg \varphi \vee \psi$

c) $\models (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \neg (\varphi \vee \psi) \vee \neg (\neg \varphi \vee \neg \psi)$

d) $\models \forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x \neg\varphi$

16) ¿Podría definirse la sustitución simultánea como una sustitución iterada? O lo que es lo mismo, ¿podríamos definir

$$\mathbf{S}^{t_1 \ldots t_n}_{x_1 \ldots x_n}\, \varphi \text{ como } (\ldots((\mathbf{S}^{t_1}_{x_1})\, \mathbf{S}^{t_2}_{x_2}) \ldots)^{t_n}_{x_n}\, \varphi?$$

Problema 3

Demostrad el Teorema 2.7.1.

Problema 4

Demostrad que toda fórmula de primer orden es equivalente a una fórmula cuyos únicos signos lógicos son $\neg$, $\vee$, $\exists$ y $=$. Es decir, que los conectores, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ y el

cuantificador $\forall$ son prescindibles. Para ello definid por inducción semiótica una función.

$$f\colon \mathrm{FOR}(L) \to \mathrm{FOR}(L - \{\wedge, \to, \leftrightarrow, \forall\})$$

tal que: para cada $\varphi \in \mathrm{FOR}(L)$,

$$\models \varphi \leftrightarrow f(\varphi)$$

NOTA IMPORTANTE

Utilizando el resultado del problema 4 podremos, siempre que se estime conveniente, considerar que nuestro lenguaje sólo contiene $\neg$, $\vee$, $\exists$ y $=$.

3. *ALGUNOS LENGUAJES UTILES*

A continuación consideraremos algunos lenguajes que nos resultarán de mucha utilidad, pues se adecúan a ciertas clases de sistemas de estructuras conocidas.

3.1. El lenguaje de la identidad

Este lenguaje carece de signos peculiares y el único relator que posee es el igualador. Tiene, naturalmente, todos los signos lógicos.

Un sistema adecuado es $\mathcal{A} = \langle A \rangle$ en donde sólo se especifica el universo del discurso. ¿Qué se puede decir en un lenguaje tan parco?

Considerad la sentencia

$$\exists y_1 y_2 y_3 (y_1 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge y_2 \neq y_3)$$

Los sistemas $\langle\{3,7,9\}\rangle$, $\langle \mathbb{N} \rangle$, $\langle\{0,1,2,3\}\rangle$ son modelos de φ_3. Sin embargo, $\langle\{3,2\}\rangle$ no lo es. La sentencia φ_3 afirma que en el universo del modelo hay al menos tres elementos.

¿Cómo expresaríamos que en el universo del modelo hay a lo sumo tres elementos?

La sentencia

$$\forall x_0 x_1 x_2 x_3 (x_0 = x_1 \vee x_0 = x_2 \vee x_0 = x_3 \vee x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_2 = x_3)$$

lo expresa.

De forma general, la sentencia

$$\varphi_n = \exists y_1 \ldots y_n \textstyle\bigwedge_{i \neq j} y_i \neq y_j \text{ —} i, j \in \{1, \ldots, n\}\text{—}$$

dice que en el universo hay al menos n elementos.

Y la sentencia

$$\psi_n \equiv \forall x_0 \ldots x_n \bigvee_{i \neq j} x_i = x_j \text{ —con } i, j \in \{0, \ldots, n\}\text{—}$$

dice que los elementos no pasan de n.

La conyunción de estas sentencias expresa que hay exactamente n elementos. Es decir, $\mathscr{A}$ es modelo de $\varphi_n \wedge \psi_n$ syss **A** tiene exactamente n elementos.

Puesto que los sistemas de tipo $\langle \varnothing; \varnothing \rangle$ no tienen más que el universo pelado, sólo basta con que los universos sean biyectables para que dos sistemas sean isomorfos. Por consiguiente, la sentencia $\varphi_n \wedge \psi_n$ caracteriza sus modelos tan aquilatadamente, que los conduce a la isomorfía —es decir, identidad de estructura—. Este problema, y otros similares, volverá a plantearse en el capítulo VIII.

Hemos visto que en el lenguaje de la identidad se puede expresar el hecho de que el universo del modelo tenga un número finito y determinado de elementos. ¿Se puede expresar el que tenga un número finito pero indeterminado de elementos? Es decir, ¿hay alguna sentencia φ que tenga como modelos a todos los sistemas $\mathscr{A}$ de universo finito? Es el capítulo V veremos que no. Y lo que es más, ni tan siquiera con un conjunto infinito de sentencias, podemos expresar la finitud. También veremos que la infinitud es expresable mediante un conjunto infinito de sentencias.

3.1.1. *Ejercicios*

1) Demostrad que todo sistema $\mathscr{A}$ es modelo de:

1.a) $\forall x\, x = x$

1.b) $\forall xy\, (x = y \rightarrow y = x)$

1c) $\forall xyz\, (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$

2) Demostrad que $\models \psi_n \leftrightarrow \neg \varphi_{n+1}$ para cada $n \geqslant 2$.

3.2. El lenguaje de los grupos

La estructura de grupo la poseen algunos sistemas de tipo $\langle 0,2; \varnothing \rangle$. Por lo tanto, el lenguaje adecuado para hablar de grupos posee un functor ceroario y otro binario, e y $+$.

Es fácil ver que las sentencias

$$\alpha_1 \equiv \forall xyz\, x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\alpha_2 \equiv \forall x\, (x + e = x \wedge e + x = x)$$

$$\alpha_3 \equiv \forall x \exists y\, x + y = e$$

axiomatizan la estructura de grupo. Es decir, $\mathscr{A}$ de tipo $\langle 0,2; \varnothing \rangle$ es un grupo si y sólo si $\mathscr{A}$ es modelo de $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ —o, lo que es lo mismo, si y sólo si $\mathscr{A} \in$ MOD$(\bigwedge_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i)$.

3.2.1. *Ejercicios*

1) Demostrad que $\bigwedge_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i \nvDash \beta_1$, siendo $\beta_1 \equiv \forall x\, x + e = e$.

2) Encontrad un modelo de $\bigwedge_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i \wedge \beta_1$.

3) Demostrad que $\bigwedge_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i \nvDash \beta_2$, siendo $\beta_2 \equiv \forall xy\, x + y = y + x$.

4) Encontrad un modelo de $\bigwedge_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i \wedge \beta_2$.

5) Encontrad un modelo de $\bigwedge_{1 \leq i \leq 3} \alpha_i \wedge \varphi_5 \wedge \psi_5$ siendo φ_5 y ψ_5 las fórmulas que indican que el universo tiene cinco elementos —véase II.3.1—.

6) Demostrad que se puede extender el lenguaje de los grupos definiendo en $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ un functor monario que represente la función que asigna a cada elemento su simétrico.

Problema 5

Para cada número natural $n \geq 1$ sea $\theta_n \equiv \forall x\, x + \overset{(n}{\ldots} + x = e$. Demostrad que si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son sistemas de tipo $\langle 0,2; \varnothing \rangle$, de la misma cardinalidad y ambos son modelo de $(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \wedge \beta_2 \wedge \theta_n)$, entonces $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$.

3.3. El lenguaje de los órdenes

La estructura de orden la poseen, entre otros, los sistemas $\langle \mathscr{P}\mathbf{A}, \subseteq \rangle$ y $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$. Para hablar acerca de estos sistemas introducimos un lenguaje con un sólo signo peculiar: el relator binario $\leq$.

Para axiomatizar la estructura de orden parcial nos basta con:

$$\gamma_1 \equiv \forall x\, x \leq x$$

$$\gamma_2 \equiv \forall xy\, (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$$

$$\gamma_3 \equiv \forall xyz\, (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$$

En el capítulo anterior (I.2.3) vimos que $\langle \mathscr{P}\mathbf{A}, \subseteq \rangle$ y $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ no comparten todas sus propiedades: el primer sistema es un orden parcial pero no lo es lineal. Para distinguirlos añadimos el axioma $\gamma_n \equiv \forall xy\, (x \leq y \vee y \leq x)$.

Es fácil ver que $\langle \mathscr{P}\mathbf{A}, \subseteq \rangle$ no es modelo de γ_n mientras que $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ sí que lo es.

El sistema de los naturales con su orden posee además la estructura de buen orden; es decir, cada subconjunto no vacío de su universo posee elemento mínimo. ¿Podemos diferenciar en el lenguaje de primer orden la estructura de orden lineal de la de buen orden? En el capítulo V volveremos sobre este problema. De momento pensad en la dificultad que entraña el hablar acerca de todos los subconjuntos no vacíos del universo. En la lógica elemental (o, lo que es lo mismo, la de primer orden) se cuantifica sobre elementos, no sobre conjuntos.

3.3.1. *Ejercicios*

1) Formalizad en primer orden las condiciones v), vi), vii) y viii) de 1.2.3. Llamad a esos axiomas γ_5, γ_6, γ_7 y γ_8.

2) Demostrad que $\bigwedge_{1\leq i\leq 4}\gamma_i \nvDash \gamma_8$.

3) Encontrad una fórmula que nos sirva para distinguir $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ de $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$; es decir, que valga en uno de los sistemas pero no en el otro.

4) Demostrad que no hay ningún modelo finito de $\bigwedge_{1\leq i\leq 6}\gamma_i$.

5) Encontrad una fórmula que nos sirva para distinguir $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ de $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$.

Problema 6

Sean $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ y $\mathcal{A}_4$ los órdenes parciales cuyos diagramas de Hasse aparecen en las figuras de igual índice.

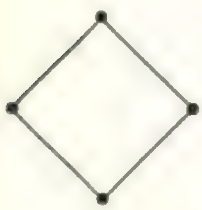


Figura 1


Figura 2


Figura 3


Figura 4

a) ¿Hay entre ellos algún sistema que sea modelo de $\exists x \forall y\ x \leq y$?

b) ¿Hay alguno que lo sea de $\forall x \neg \exists y\ (x \leq y \wedge \neg\, x = y)$?

c) Encontrad una sentencia que distinga $\mathcal{A}_2$ de $\mathcal{A}_4$.

3.4. El lenguaje de la aritmética

El lenguaje $L(\mathcal{N})$, adecuado para el sistema de los naturales $\langle \mathbb{N}, 0, S, +, \cdot \rangle$ contiene, como signos peculiares:

un functor ceroario, c
un functor monario, f
dos functores binarios, $+$ y $\cdot$

En este sistema $\mathcal{N}$ son verdaderas las sentencias siguientes:

$$\alpha_1 = \forall x\ c \neq fx$$
$$\alpha_2 = \forall xy\ (fx = fy \rightarrow x = y)$$
$$\alpha_3 = \forall y\ (y \neq c \rightarrow \exists x\ y = fx)$$
$$\alpha_{4\text{-}1} = \forall x\ fx \neq x$$
$$\alpha_{4\text{-}2} = \forall x\ ffx \neq x$$
$$\alpha_{4\text{-}n} = \forall x\ f \overset{(n}{\ldots} fx \neq x$$
$$\alpha_5 = \forall x\ x + c = x$$
$$\alpha_6 = \forall xy\ x + fy = f(x + y)$$
$$\alpha_7 = \forall x\ x \cdot c = c$$
$$\alpha_8 = \forall xy\ x \cdot fy = (x \cdot y) + x.$$

Es fácil ver qué significan estas sentencias. La primera dice que 0 no es el siguiente de nadie, de forma más general, que en el recorrido de la función S no está el 0. La segunda dice que la función S es inyectiva. La tercera, que todo número que no sea el cero es el siguiente de algún otro. La $\alpha_{4\text{-}n}$ dice que no hay ciclos de tamaño n. α_5 y α_6 definen la suma mientras que α_7 y α_8 definen el producto.

Es evidente que no es una definición explícita, ¿en qué sentido, pues, constituyen una definición de suma y producto? Se trata de lo que denominamos definiciones recursivas*, usando c y f, y en el modelo $\mathcal{N}$ determinan la suma y el producto en el sentido siguiente: existe y es única una función binaria $+ : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ que verifica α_5 y α_6. Lo mismo pasa con el producto.

Cada una de las sentencias de este conjunto es verdadera en el sistema $\mathcal{N}$, ¿pero tienen algún otro modelo? Modelos finitos no puede haberlos porque si $\mathcal{A}$ fuera un modelo de α_1, α_2 y α_3 la función $f^{\mathcal{A}}$ tendría que ser una biyección de **A** en **A** $- \{c^{\mathcal{A}}\}$ y esto equivale a pedir que **A** sea infinito. Sin embargo, modelos infinitos los hay de cualquier cardinalidad infinita y naturalmente, no serán isomorfos a $\mathcal{N}$ los de distinta cardinalidad.

---

* Recomiendo encarecidamente la lectura de: «On mathematical induction» de Leon Henkin.

Estudiaremos también las propiedades del sistema $\mathcal{N}_S = \langle \mathbb{N}, 0, S \rangle$. El conjunto de las sentencias $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{4\ 1}, \alpha_{4\ 2}, \ldots\}$ escrito en el lenguaje $L(\mathcal{N}_S)$ constituye una axiomatización completa de $\mathcal{N}_S$. También lo es el conjunto de los llamados axiomas de Peano de primer orden:

$$P1 \equiv \forall x\, c \neq fx$$

$$P2 \equiv \forall xy\, (fx = fy \rightarrow x = y)$$

$$P3 \equiv \varphi(c) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \varphi(fx)) \rightarrow \forall x\, \varphi(x).$$

Recordad que $\varphi(x)$ sólo significa que $x \in \text{LBR}(\varphi)$ y que por tanto en φ puede haber otras variables libres aparte de x.

P3 es el axioma de la inducción matemática formulado en primer orden. Dicho axioma dice que toda propiedad, definida mediante una fórmula de primer orden, que tenga el cero y el siguiente de todo número que posea la propiedad, es común a todos los números. P3 es lo que llamaremos un esquema axiomático: no es una fórmula, sino una serie infinita de ellas, que se obtienen al sustituir φ por fórmulas $L(\mathcal{N}_S)$.

En el capítulo anterior introdujimos los sistemas de Peano, formulando en el metalenguaje las propiedades que los caracterizan. En P1 y P2 se expresan las dos primeras condiciones de los sistemas de Peano. ¿Sucede lo mismo con P3? Como se recordará, el axioma de inducción lo formulamos diciendo que cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ que contenga el 0 y que esté cerrado por la función del siguiente es todo $\mathbb{N}$. Pues bien, subconjuntos de $\mathbb{N}$ hay un número infinito-supernumerable mientras que las fórmulas del lenguaje —y por tanto, los subconjuntos de $\mathbb{N}$ definidos por fórmulas— constituyen, como sabéis, un conjunto numerable. Además, el conjunto $\{0, S0, SS0, \ldots\}$ no es definible en primer orden y por lo tanto no tenemos inducción para este conjunto. Por consiguiente, P3 es mucho menos potente que su correspondiente formulación metalingüística.

Para poder formular el principio de inducción en toda su generalidad necesitamos la lógica de segundo orden. En esta lógica la cuantificación se extiende también a conjuntos y relaciones. El principio de inducción en segundo orden es:

$$\forall X\, (Xc \wedge \forall x(Xx \rightarrow Xfx) \rightarrow \forall x\, Xx).$$

NOTA

Volveremos sobre estos problemas en el Capítulo VI.

3.4.1. *Ejercicios*

1) ¿Hay algún modelo finito de $\{\alpha_1, \alpha_2\}$?

2) Demostrad que $\alpha_2 \nvDash \alpha_1$.

3) Demostrad que $\langle \mathbb{N}, 0, + \rangle$ no es un grupo.

4) Escribid sentencias verdaderas en $\mathcal{N}$.

5) ¿Es $\langle \mathbb{Z}, 0, \mathbf{f} \rangle$, siendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 1$, un modelo de

$$\{P1, P2\} \cup \{P3_\varphi / \varphi \in FOR(L(\mathcal{N}_S)) \wedge x \in LBR(\varphi)\}?$$

6) Encontrad algún modelo finito de

$$\{P1\} \cup \{P3_\varphi / \varphi \in FOR(L(\mathcal{N}_S))\}$$

7) Encontrad algún modelo finito de

$$\{P2\} \cup \{P3_\varphi / \varphi \in FOR(L(\mathcal{N}_S))\}$$

3.5. El lenguaje de la teoría de conjuntos. (Los axiomas de Zermelo Fraenkel).

En este lenguaje sólo tenemos un signo peculiar, el relator $\in$ que se interpretará como la relación binaria de pertenencia. Al desarrollar la teoría se van introduciendo otros signos mediante definición: $\varnothing$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, etc... (Como veis estoy utilizando los mismos signos en el lenguaje y en el metalenguaje: $\in$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, los estábamos usando en el metalenguaje y ahora también en el lenguaje para hablar de conjuntos. Espero que esto no cree confusión).

3.5.1. *Jerarquía estándar de conjuntos*

Este lenguaje sirve para hablar acerca del par formado por $\langle \mathcal{V}, \in \rangle$ en donde $\mathcal{V}$ es la jerarquía estándar formada exclusivamente por conjuntos —naturalmente, $\mathcal{V}$ mismo no es un conjunto— y la relación de pertenencia.

Como sabeis, esta jerarquía se construye por niveles, $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \ldots$ de la siguiente manera:

$\mathcal{V}_0 = \varnothing$ (en el primer nivel está el conjunto vacío).
$\mathcal{V}_1 = \{\varnothing\} = \mathcal{P}\mathcal{V}_0$ (en el segundo nivel está el conjunto cuyo único elemento es el vacío).
$\mathcal{V}_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \mathcal{P}\mathcal{V}_1$ (en el tercer nivel está el conjunto de dos elementos, $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$).

Y cuando tenemos el nivel $\mathcal{V}_n$ formamos $\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{P}\mathcal{V}_n$ (en este nivel está el conjunto formado por todos los conjuntos que se pueden construir con los ingredientes del nivel anterior).

En $\mathcal{V}_\omega$ hacemos acopio de niveles anteriores y tomamos la unión infinita de los niveles precedentes

$$\mathcal{V}_\omega = \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2 \ldots \quad \text{y continuamos}$$

$$\mathcal{V}_{\omega+1} = \mathcal{P}\mathcal{V}_\omega$$

En general, para cada ordinal sucesor $\beta = \alpha + 1$

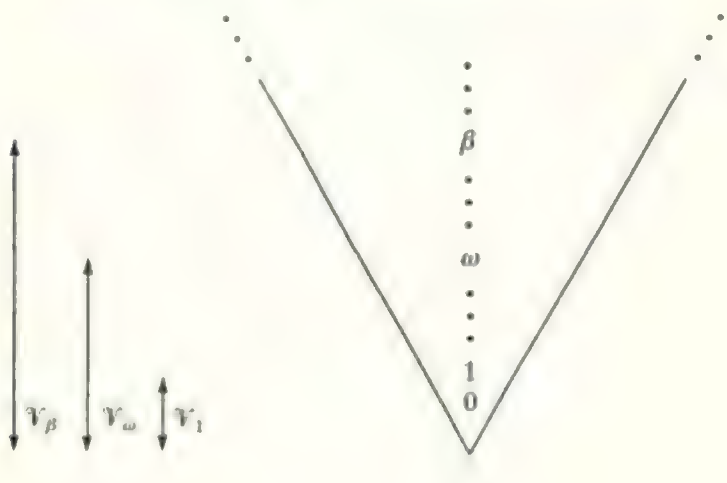
$$\mathcal{V}_\beta = \mathcal{P}\mathcal{V}_\alpha$$

y para cada ordinal límite λ

$$\mathcal{V}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{V}_\alpha$$

Como veis, se trata de una jerarquía inacabable pues cuando parece que la construcción toca a su fin, se toma la unión de los niveles anteriores formando así un nivel nuevo a partir del cual se construyen otros tomando conjuntos de partes.

Esta es la jerarquía en vértice, comenzando por $\emptyset$ que cifra nuestra noción intuitiva de qué es un conjunto (conjuntos son los elementos de los niveles de jerarquía). El principio fundamental es el siguiente: cada uno de los conjuntos aparece en algún nivel de la jerarquía.



3.5.2. *Axiomas de Zermelo-Fraenkel*

En $\langle \mathcal{V}, \in \rangle$ son verdaderas las sentencias:

$$\text{EXT. } \forall xy(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

PAR. $\forall xy \exists z \forall v(v \in z \leftrightarrow v = x \lor v = y)$

GUN. $\forall x\, \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists v(v \in x \land z \in v))$

POT. $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall v(v \in z \rightarrow v \in x))$

SEP. $\forall x_0 \ldots x_{n-1} \forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \land \varphi))$

—siendo LBR(φ) $\subseteq \{z, x_0, \ldots, x_{n-1}\}$—.

Estas sentencias son los conocidos axiomas de extensionalidad, del par, de la gran unión, de las partes o potencia de un conjunto y el de separación. Todos estos axiomas son verdaderos en la jerarquía estándar de los conjuntos.

El resto de los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel se formula más adecuadamente cuando se amplía el lenguaje original definiendo otros functores y relatores. Como sabeis, los nuevos signos son «teóricamente» prescindibles y se podría escribir toda la teoría de conjuntos usando simplemente $\in$ y $=$. Introduzcamos en el lenguaje de la teoría de conjuntos los functores y relatores siguientes:

$\varnothing$	(functor ceroario para el conjunto vacío),
$\subseteq$	(relator binario para «ser un subconjunto de»),
$\{\ ,\ \}$	(functor binario para los pares).
$\cup$	(functor binario de unión).
$\cap$	(functor binario para la intersección).
P	(functor para el conjunto potencia).

Estos signos se introducen, respectivamente, de la manera siguiente:

$$\forall y(\varnothing = y \leftrightarrow \forall z \neg z \in y)$$

$$\forall xy(x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y))$$

$$\forall xyz(\{x, y\} = z \leftrightarrow \forall v(v \in z \leftrightarrow v = x \lor v = y))$$

—abreviaremos $\{x, x\}$ poniendo $\{x\}$—

$$\forall xyz(x \cup y = z \leftrightarrow \forall v(v \in z \leftrightarrow v \in x \lor v \in y))$$

$$\forall xyz(x \cap y = z \leftrightarrow \forall v(v \in z \leftrightarrow v \in x \land v \in y))$$

$$\forall xy(Px = y \leftrightarrow \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x))$$

El resto de los axiomas de la teoría que nos ocupa son:

INF. $\exists x(\varnothing \in x \land \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$

A.E. $\forall x((\neg \varnothing \in x \land \forall uv(u \in x \land v \in x \land \neg u = v \rightarrow u \cap v = \varnothing)) \rightarrow \exists y \forall v(v \in x \rightarrow \exists^1 zz \in v \cap y))$

REG. $\forall x(\neg x = \varnothing \rightarrow \exists y(y \in x \land y \cap x = \varnothing))$

REE. $\forall x_0 \ldots x_{n-1}(\forall x \exists^1 y\, \varphi \rightarrow \forall u \exists v \forall y\, (y \in v \leftrightarrow \exists x(x \in u \wedge \varphi)))$
—siendo $LBR(\varphi) \subseteq \{x, y, x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ u, v no están en este conjunto—.

Estas sentencias son los axiomas de infinitud, elección, regularidad y reemplazo.

3.5.3. *Ejercicios*

1) Sea $\Delta = \{EXT, PAR, GUN, POT, SEP\}$. Demostrad que la extensión del lenguaje de la teoría de conjuntos que hemos hecho es correcta; es decir,

$$\Delta \vDash \forall xy\, \exists^1 z\, \varphi_f\langle xyz\rangle$$

siendo f el nuevo functor; es decir, $\{\ \}$, $\cup$, $\cap$.

2) Sea Δ el conjunto de axiomas del ejercicio anterior. Demostrad que los functores monarios $\varnothing$ y P se han introducido bien.

3) En el lenguaje primitivo de la teoría de conjuntos —con $\in$ como único signo peculiar— escribir las fórmulas

a) $\forall x(x \subseteq \varnothing \rightarrow x = \varnothing)$

b) $\forall xyz((x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z))$

c) $\forall x\, x \in Px$.

4. TEOREMAS SEMANTICOS

4.1. Teorema de coincidencia

Con este teorema vemos que en la denotación de términos o en la satisfacción de fórmulas los valores de la asignación que son relevantes son los de las variables libres, y que, únicamente cuando se trata de expresiones abiertas, la asignación incide sobre el resultado final.

La versión del teorema de coincidencia que probaré es la siguiente:

Sea $\mathcal{A}$ un sistema y $\mathcal{I}_1: \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{A}$ e $\mathcal{I}_2: \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{A}$. Se cumple que:

a) Si $\mathcal{I}_1 \upharpoonright LBR(\tau) = \mathcal{I}_2 \upharpoonright LBR(\tau)$ entonces $\mathcal{A}\mathcal{I}_1(\tau) = \mathcal{A}\mathcal{I}_2(\tau)$.

b) Si $\mathcal{I}_1 \upharpoonright LBR(\varphi) = \mathcal{I}_2 \upharpoonright LBR(\varphi)$ entonces $\mathcal{A}\mathcal{I}_1$ sat φ syss $\mathcal{A}\mathcal{I}_2$ satφ.

Demostración

En todos los casos suponemos que $\mathcal{I}_1 \upharpoonright LBR(\varepsilon) = \mathcal{I}_2 \upharpoonright LBR(\varepsilon)$

(T1) Para $\tau = x$, $LBR(\tau) = \{x\}$ y por tanto $\mathcal{I}_1(x) = \mathcal{I}_2(x)$. Luego $\mathcal{A}\mathcal{I}_1(\tau) = \mathcal{A}\mathcal{I}_2(\tau)$.

(T2) Supuesto para $\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}$, demostrarlo para $f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}$

$\mathcal{AI}_1(f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}) = \mathfrak{f}_i(\mathcal{AI}_1(\tau_1), \ldots, \mathcal{AI}_1(\tau_{\mu(i)})) =$

$= \mathfrak{f}_i(\mathcal{AI}_2(\tau_1), \ldots, \mathcal{AI}_2(\tau_{\mu(i)})) =$ (supuesto inductivo)

$= \mathcal{AI}_2(f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)})$

(F1) Vale para fórmulas simples.

$\mathcal{AI}_1$ sat $R_j\tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)}$ syss $\langle \mathcal{AI}_1(\tau_1), \ldots, \mathcal{AI}_1(\tau_{\delta(j)})\rangle \in \mathbf{R}_j$

syss $\langle \mathcal{AI}_2(\tau_1), \ldots, \mathcal{AI}_2(\tau_{\delta(j)})\rangle \in \mathbf{R}_j$
(pues $\mathcal{AI}_1(\tau_1) = \mathcal{AI}_2(\tau_1), \ldots$, etc. por el supuesto inductivo, teniendo en cuenta que $\mathcal{I}_1 \mid \mathrm{LBR}(\tau_1) = \mathcal{I}_2 \mid \mathrm{LBR}(\tau_1), \ldots$)

syss $\mathcal{AI}_2$ sat $\mathrm{R}_j\ \tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)}$

Igual para $\tau_1 = \tau_2$

(F2) Suponiendo que vale para φ, demostrarlo para $\neg\varphi$

$\mathcal{AI}_1$ sat $\neg\varphi$ syss no $\mathcal{AI}_1$ sat φ

syss no $\mathcal{AI}_2$ sat φ (supuesto inductivo)

syss $\mathcal{AI}_2$ sat $\neg\varphi$

(F3) Suponiendo que vale para φ y para ψ demostrarlo para $(\varphi \wedge \psi)$

$\mathcal{AI}_1$ sat $\varphi \wedge \psi$ syss $\mathcal{AI}_1$ sat φ y $\mathcal{AI}_1$ sat ψ

syss $\mathcal{AI}_2$ sat φ y $\mathcal{AI}_2$ sat ψ (supuesto inductivo)

syss $\mathcal{AI}_2$ sat $\varphi \wedge \psi$

Igual para $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$.

(F4) Suponiendo que vale para φ demostrarlo para $\forall x\varphi$

$\mathcal{AI}_1$ sat $\forall x\varphi$ syss para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}^{\mathbf{x}}_{1x}$ sat φ

syss para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}^{\mathbf{x}}_{2x}$ sat φ

(pues $\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{1x} \mid \mathrm{LBR}(\varphi) = \mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{2x} \mid \mathrm{LBR}(\varphi)$

y por el supuesto inductivo, $\mathcal{AI}^{\mathbf{x}}_{2x}$ sat φ)

syss $\mathcal{AI}_2$ sat $\forall x\varphi$.

De forma similar para $\exists x\varphi$. ■

NOTA

Ahora podemos justificar la notación introducida en II.2.1. Como recordareis, dados $\mathscr{A}$, una fórmula $\varphi\langle x_1 \dots x_n\rangle \in$ FOR(L($\mathscr{A}$)) y $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$ escribimos $\mathscr{A}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$ en vez de $\mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}_{x_1 \dots x_n}$ sat φ.

Ahora está claro porqué no necesitamos hacer referencia a la asignación $\mathscr{I}$: los parámetros $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ fijan el valor de las variables libres (en el orden de aparición en la fórmula) y el valor de las variables ligadas, como sabemos por el teorema de coincidencia, es absolutamente indiferente.

4.2. Teorema de sustitución

Este teorema lo que expresa es que entre lenguaje y sistema se da una especie de homomorfismo: da lo mismo sustituir una variable por un término en el lenguaje, que utilizar una nueva asignación en donde a la variable sustituida se le asigne lo que en la asignación original se le asignaba al término sustituyente.

El enunciado del teorema de sustitución es así:

Dado un sistema $\mathscr{A}$ y una asignación $\mathscr{I}: \mathscr{V} \to \mathbf{A}$ se cumple:

a) Para cada τ_0: $\mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathscr{A}\mathscr{I}(\tau)}_x(\tau_0) = \mathscr{A}\mathscr{I}(\mathbf{S}^{\tau}_x\,\tau_0)$.

b) Para cada φ: $\mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathscr{A}\mathscr{I}(\tau)}_x$ sat φ syss $\mathscr{A}\mathscr{I}$ sat $\mathbf{S}^{\tau}_x\,\varphi$.

Demostración inductiva

(T1) Para $\tau_0 = z$: $\mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathscr{A}\mathscr{I}(\tau)}_x(z) = \begin{cases} \mathscr{A}\mathscr{I}(\tau) = \mathscr{A}\mathscr{I}\,(\mathbf{S}^{\tau}_x\,z), \text{ si } x = z \\ \mathscr{A}\mathscr{I}(z) = \mathscr{A}\mathscr{I}\,(\mathbf{S}^{\tau}_x\,z), \text{ si } x \neq z \end{cases}$

(T2) Supuesto que vale para $\tau_1, \dots, \tau_{\mu(i)}$ veamos que vale para $f_i\,\tau_1 \dots \tau_{\mu(i)}$

$$\mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathscr{A}\mathscr{I}(\tau)}_x(f_i\tau_1 \dots \tau_{\mu(i)}) = \mathbf{f}_i(\mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathscr{A}\mathscr{I}(\tau)}_x(\tau_1), \dots, \mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathscr{A}\mathscr{I}(\tau)}_x(\tau_{\mu(i)})) =$$

$$= \mathbf{f}_i(\mathscr{A}\mathscr{I}(\mathbf{S}^{\tau}_x(\tau_1)), \dots, \mathscr{A}\mathscr{I}(\mathbf{S}^{\tau}_x(\tau_{\mu(i)})) = \text{(supuesto inductivo)}$$

$$= \mathscr{A}\mathscr{I}(\mathbf{S}^{\tau}_x(f_i\tau_1 \dots \tau_{\mu(i)}))$$

(F1) $\mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathscr{A}\mathscr{I}(\tau)}_x$ sat $R_j\tau_1 \dots \tau_{\delta(j)}$ syss $\langle \mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathscr{A}\mathscr{I}(\tau)}_x(\tau_1), \dots, \mathscr{A}\mathscr{I}^{\mathscr{A}\mathscr{I}(\tau)}_x(\tau_{\delta(j)})\rangle \in \mathbf{R}_j$

syss $\langle \mathscr{A}\mathscr{I}(\mathbf{S}^{\tau}_x(\tau_1)), \dots, \mathscr{A}\mathscr{I}\,(\mathbf{S}^{\tau}_x(\tau_{\delta(j)}))\rangle \in \mathbf{R}_j$
(supuesto inductivo)

syss $\mathscr{A}\mathscr{I}$ sat $\mathbf{S}^{\tau}_x\,(R_j\tau_1 \dots \tau_{\delta(j)})$

En especial

$$\mathcal{AI}_x^{\mathcal{AI}(\tau)} \text{ sat } \tau_1 = \tau_2 \text{ syss } \mathcal{AI} \text{ sat } \mathbf{S}_x^\tau(\tau_1 = \tau_2).$$

(F2) Supuesto que vale para φ, demostrarlo para $\neg\varphi$

$\mathcal{AI}_x^{\mathcal{AI}(\tau)}$ sat $\neg\varphi$ syss no $\mathcal{AI}_x^{\mathcal{AI}(\tau)}$ sat φ

syss no $\mathcal{AI}$ sat $\mathbf{S}_x^\tau\, \varphi$ (supuesto inductivo)

syss $\mathcal{AI}$ sat $\neg\, \mathbf{S}_x^\tau\, \varphi$

syss $\mathcal{AI}$ sat $\mathbf{S}_x^\tau\, \neg\varphi$

(F3) Supuesto que vale φ y ψ, demostrarlo para $\varphi \wedge \psi$.

$\mathcal{AI}_x^{\mathcal{AI}(\tau)}$ sat $\varphi \wedge \psi$ syss $\mathcal{AI}_x^{\mathcal{AI}(\tau)}$ sat φ y $\mathcal{AI}_x^{\mathcal{AI}(\tau)}$ sat ψ

syss $\mathcal{AI}$ sat $\mathbf{S}_x^\tau\, \varphi$ y $\mathcal{AI}$ sat $\mathbf{S}_x^\tau\, \psi$ (supuesto inductivo)

syss $\mathcal{AI}$ sat $\mathbf{S}_x^\tau\, \varphi \wedge \mathbf{S}_x^\tau\, \psi$

syss $\mathcal{AI}$ sat $\mathbf{S}_x^\tau\, (\varphi \wedge \psi)$

De forma similar para $(\varphi \vee \psi)$, $\varphi \rightarrow \psi)$, y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
(F4) Supuesto que vale para φ, demostrarlo para $\forall z\varphi$.

Hay tres posibilidades: 1. $x \notin$ LBR($\forall z\varphi$); 2. $x \in$ LBR($\forall z\varphi$) y $z \notin$ LBR(τ) y 3. $x \in$ LBR($\forall z\varphi$) y $z \in$ LBR(τ) y v nueva.

1. Sea $x \notin$ LBR($\forall z\varphi$)

$\mathcal{AI}_x^{\mathcal{AI}(\tau)}$ sat $\forall z\varphi$ syss $\mathcal{AI}$ sat $\forall z\varphi$ (por el teorema de coincidencia, ya que

$$\mathcal{I} \mid \text{LBR}(\forall z\varphi) = \mathcal{I}_x^{\mathcal{AI}(\tau)} \mid \text{LBR}(\forall z\varphi))$$

syss $\mathcal{AI}$ sat $\mathbf{S}_x^\tau\, \forall z\varphi$

2. Sea $x \in$ LBR($\forall z\varphi$) y $z \notin$ LBR(τ)

$\mathcal{AI}_x^{\mathcal{AI}(\tau)}$ sat $\forall z\varphi$ syss para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}_{xz}^{\mathcal{AI}(\tau)\mathbf{z}}$ sat φ

syss para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}_{zx}^{\mathbf{z}\mathcal{AI}(\tau)}$ sat φ (pues $x \not\equiv z$)

syss para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}_{zx}^{\mathbf{z}\mathcal{AI}_z^{\mathbf{z}}(\tau)}$ sat φ (por el teorema de coincidencia,

$\mathcal{AI}(\tau) = \mathcal{AI}^{\mathbf{z}}_{z}(\tau)$ ya que $z \notin \mathrm{LBR}(\tau))$

syss para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}^{\mathbf{z}}_{z}$ sat sat $\mathbf{S}^{\tau}_{x}\,\varphi$ (supuesto inductivo)

syss $\mathcal{AI}$ sat $\forall z\,\mathbf{S}^{\tau}_{x}\,\varphi$

syss $\mathcal{AI}$ sat $\mathbf{S}^{\tau}_{x}\,\forall z\varphi$.

3. Sea $x \in \mathrm{LBR}(\forall z\varphi)$ y $z \in \mathrm{LBR}(\tau)$.

$\mathcal{AI}^{\mathcal{AI}(\tau)}_{x}$ sat $\forall z\varphi$ syss para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}^{\mathcal{AI}(\tau)\mathbf{z}}_{xz}$ sat φ

syss para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}^{\mathcal{AI}(\tau)\mathbf{zz}}_{xvz}$ sat φ (por teorema de coincidencia, ya que

$\mathcal{I}^{\mathcal{AI}(\tau)\mathbf{z}}_{xz} \mid \mathrm{LBR}(\varphi) = \mathcal{I}^{\mathcal{AI}(\tau)\mathbf{zz}}_{xvz} \mid \mathrm{LBR}(\varphi))$

syss para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}^{\mathcal{AI}(\tau)\mathbf{z}\mathcal{AI}^{\mathcal{AI}(\tau)\mathbf{z}}_{xv}(v)}_{xvz}$ sat φ

(pues $\mathcal{AI}^{\mathcal{AI}(\tau)\mathbf{z}}_{xv}(v) = \mathbf{z})$

syss para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}^{\mathcal{AI}(\tau)\mathbf{z}}_{xv}$ sat $\mathbf{S}^{v}_{z}\,\varphi$ (supuesto inductivo)

syss para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}^{\mathbf{z}\mathcal{AI}(\tau)}_{vx}$ sat $\mathbf{S}^{v}_{z}\,\varphi$

syss para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}^{\mathbf{z}\mathcal{AI}^{\mathbf{z}}_{v}(\tau)}_{vx}$ sat $\mathbf{S}^{v}_{z}\,\varphi$ (por teorema de coincidencia, ya que

$\mathcal{I} \mid \mathrm{LBR}(\tau) = \mathcal{I}^{\mathbf{z}}_{v} \mid \mathrm{LBR}(\tau))$

syss para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{AI}^{\mathbf{z}}_{v}$ sat $\mathbf{S}^{\tau}_{x}\,\mathbf{S}^{v}_{z}\,\varphi$ (supuesto inductivo)

syss $\mathcal{AI}$ sat $\forall v\,\mathbf{S}^{\tau}_{x}\,\mathbf{S}^{v}_{z}\,\varphi$

syss $\mathcal{AI}$ sat $\mathbf{S}^{\tau}_{x}\,\forall z\,\varphi$. ■

NOTA

El Teorema de sustitución tiene una versión ampliada que enuncio, pero no demuestro.

Si $\mathcal{A}$ es un sistema y $\mathcal{I}$ una asignación, entonces:

a) Para cada término $t \in \mathrm{TER(L)}$

$$\mathcal{AI}(\mathbf{S}^{\tau_1\ldots\tau_n}_{x_1\ldots x_n}\,t) = \mathcal{AI}^{\mathcal{AI}(\tau_1)\ldots\mathcal{AI}(\tau_n)}_{x_1\ldots x_n}\,t$$

b) Para cada fórmula $\varphi \in \mathrm{FOR(L)}$

$$\mathcal{A}\mathcal{I} \text{ sat } \mathbf{S}^{\tau_1 \ldots \tau_n}_{x_1 \ldots x_n}\, \varphi \text{ syss } \mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_1) \ldots \mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_n)}_{x_1 \ldots x_n} \text{ sat } \varphi$$

La demostración es parecida a la II.4.2, hacerla, si tenéis humor.

4.3. *Ejercicios*

1) Demostrad esta otra versión del teorema de coincidencia. Sea $\mathcal{A}$ un sistema, $\mathcal{I}$ una asignación sobre él.

i) Si $x \notin \mathrm{LBR}(\tau)$, entonces $\mathcal{A}\mathcal{I}^{x}_{x}(\tau) = \mathcal{A}\mathcal{I}(\tau)$.

ii) Si $x \notin \mathrm{LBR}(\varphi)$, entonces $\mathcal{A}\mathcal{I}^{x}_{x}$ sat φ syss $\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat φ.

2) Demostrad esta consecuencia del teorema de sustitución. Si z no está en φ, entonces

i) $\vDash \exists x\, \varphi(x) \leftrightarrow \exists z\, \mathbf{S}^{z}_{x}\, \varphi$.

ii) $\vDash \forall x\, \varphi(x) \leftrightarrow \forall z\, \mathbf{S}^{z}_{x}\, \varphi$.

Como recordaréis $\varphi(x)$ indica que $x \in \mathrm{LBR}(\varphi)$.

3) Demostrad que si Γ es un conjunto de sentencias, es indiferente la asignación que se tome. Es decir, si $\mathcal{A}\mathcal{I}_1$ es modelo de Γ también lo serán $\mathcal{A}\mathcal{I}_2$, $\mathcal{A}\mathcal{I}_3$, ...

4) Sea $x \notin \mathrm{LBR}(\psi)$

Demostrad

a) $\vDash (\forall x\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$

b) $\vDash (\exists x\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$

c) $\vDash (\psi \rightarrow \exists x\varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \rightarrow \varphi)$

d) $\vDash (\psi \rightarrow \forall x\varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi \rightarrow \varphi)$

5) Demostrad

a) $\vDash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$

b) $\nvDash \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi)$

c) $\vDash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$

d) $\nvDash \exists x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \leftrightarrow \exists x\varphi)$

e) $\vDash (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \rightarrow \psi)$

f) $\vDash (\exists x\varphi \rightarrow \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$

5. TEOREMA DE ISOMORFIA

Este teorema dice que cuando dos sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfos, el que una fórmula φ sea satisfecha en $\mathcal{A}$ para unos ciertos elementos de su universo, equivale a que la misma fórmula sea satisfecha en $\mathcal{B}$ para las imágenes mediante el isomorfismo de los elementos de $\mathcal{A}$ que cumplían φ.

5.1. Teorema

Si $\mathbf{h}$ es un isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ se cumple que para cada asignación $\mathcal{I}$: $\mathcal{V} \to \mathbf{A}$

a) $\mathbf{h}(\mathcal{A}\mathcal{I}(\tau)) = \mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I})(\tau)$.
b) $\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat φ syss $\mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I})$ sat φ.

Demostración por inducción semiótica

(T1) Para $\tau \equiv x$

$$\mathbf{h}(\mathcal{A}\mathcal{I}(x)) = \mathbf{h}(\mathcal{I}(x)) = (\mathbf{h} \circ \mathcal{I})\ (x) = \mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I})\ (x)$$

(T2) Supuesto que vale para $\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}$, demostrarlo para $f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(\mathcal{A}\mathcal{I})(f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}) &= \mathbf{h}(\mathbf{f}_i(\mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_1), \ldots, \mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_{\mu(i)}))) \\ &= \mathbf{g}_i(\mathbf{h}(\mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_1)), \ldots, \mathbf{h}\ (\mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_{\mu(i)}))) \text{ (por } \cong) \\ &= \mathbf{g}_i(\mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I})(\tau_1), \ldots, \mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I})(\tau_{\mu(i)})) \text{ (supuesto inductivo)} \\ &= \mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I})(f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)})\end{aligned}$$

(F1) Para $\varphi \equiv R_j\tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathcal{I} \text{ sat } R_j\tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)} &\text{ syss } \langle \mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_1), \ldots, \mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_{\delta(j)})\rangle \in \mathbf{R}_j \\ &\text{ syss } \langle \mathbf{h}(\mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_{\delta(j)})))\rangle \in \mathbf{S}_j \text{ (por } \cong) \\ &\text{ syss } \langle \mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I})(\tau_1), \ldots, \mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I})(\tau_{\delta(j)})\rangle \in \mathbf{S}_j \\ &\text{ syss } \mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I}) \text{ sat } R_j\tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)}\end{aligned}$$

De forma similar para $\tau_1 = \tau_2$.

(F2) Supuesto que vale para φ, demostrarlo para $\neg\varphi$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathcal{I} \text{ sat } \neg\varphi &\text{ syss no } \mathcal{A}\mathcal{I} \text{ sat } \varphi \\ &\text{ syss no } \mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I}) \text{ sat } \varphi \\ &\text{ syss } \mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I}) \text{ sat } \neg\varphi\end{aligned}$$

(F3) Supuesto que vale para φ y ψ, demostrarlo para $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$ y $\varphi \leftrightarrow \psi$. La prueba es sencilla.

(F4) Supuesto que vale para φ, demostrarlo para $\forall x\varphi$

$\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat $\forall x\varphi$ syss para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x}$ sat φ

syss para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x})$sat φ (por el supuesto inductivo)

syss para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$: $\mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I})^{\mathbf{h}(\mathbf{x})}_{x}$ sat φ (pues $\mathbf{h} \circ \mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x} = (\mathbf{h} \circ \mathcal{I})^{\mathbf{h}(\mathbf{x})}_{x}$)

syss para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{B}$: $\mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I})^{\mathbf{z}}_{x}$ sat φ (pues $\mathbf{h}$ es biyectiva)

syss $\mathcal{B}(\mathbf{h} \circ \mathcal{I})$ sat $\forall x\varphi$

De forma similar se demuestra para $\exists x\varphi$. ■

Utilizando este teorema conseguimos dos resultados interesantes que enuncio a continuación.

5.2. Corolario

Si $\mathbf{h}$ es un isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, entonces para cada fórmula $\varphi\langle x_1 \dots x_n\rangle$ y cada $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$ se cumple:

$$\mathcal{A}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathcal{B}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \dots \mathbf{h}(\mathbf{x}_n)] \text{ sat } \varphi \quad ■$$

5.3. *Ejercicios*

1) Retroceded a I.3.5.6 y los problemas 8, 9 y 10 ¿Cuáles de ellos son un simple corolario de II.5.1?

2) Demostrad que si $\mathbf{h}$ es una inmersión de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, entonces vale un teorema análogo al II.5.1 pero sólo para fórmulas sin cuantificadores.

3) ¿Qué pasa cuando $\mathbf{h}$ es un homomorfismo raso, vale algo similar a II.5.1 (para fórmulas simples, tal vez)?

4) Sea $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$, ¿vale un teorema análogo al II.5.1?

5) Sea $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}}\rangle$ con $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_k\rangle_{k<\beta}$ una extensión de $\mathcal{A}$ y sean $\mathrm{L} \cup \langle c_k\rangle_{k<\beta}$ y L los lenguajes $\mathrm{L}(\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}}\rangle)$ y $\mathrm{L}(\mathcal{A})$. Demostrad que para cada fórmula $\varphi \in \mathrm{FOR}(\mathrm{L})$:

$$\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}}\rangle\mathcal{I} \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathcal{A}\mathcal{I} \text{ sat } \varphi, \text{ para cada asignación } \mathcal{I}\colon \mathcal{V} \to \mathbf{A}.$$

6) Sea $\langle \mathcal{D}, \bar{\mathbf{d}}\rangle$ —con $\bar{\mathbf{d}} = \langle \mathbf{d}_k\rangle_{k<\beta}$— una extensión de $\mathcal{D}$ y sean $\mathrm{L} \cup \langle c_k\rangle_{k<\beta}$ y L los lenguajes apropiados.

Para cada $\varphi\langle x_1 \dots x_n\rangle \in \mathrm{FOR}(\mathrm{L} \cup \langle c_k\rangle_{k<\beta})$, en donde ocurren las constantes nuevas $c_{i_1}, \dots, c_{i_m}$, sea $\varphi^*\langle x_1 \dots x_n\, y_1 \dots y_m\rangle \in \mathrm{FOR}(\mathrm{L})$ tal que

$$\mathbf{S}^{c_{i_1} \dots c_{i_m}}_{y_1 \dots y_m}\, \varphi^* = \varphi.$$

(El suponer que las constantes y por lo tanto las variables nuevas $y_1, \ldots, y_m$ están al final de φ no cambia nada esencial).

Demostrad que para cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{D}$:

$$\langle \mathcal{D}, \bar{\mathbf{d}} \rangle\, [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathcal{D}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n\, \mathbf{d}_{i_1} \ldots \mathbf{d}_{i_m}] \text{ sat } \varphi^*$$

Problema 7

Si $\Gamma^* \subseteq \text{FOR}(L^*)$ tiene un modelo, $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, siendo $\Gamma \subseteq \text{FOR}(L)$ y $L \subseteq L^*$, entonces Γ tiene un modelo que es una reducción del de Γ^* y su tipo es el de L.

6. DEFINIBILIDAD EN UN SISTEMA

Dado un sistema $\mathcal{A}$ de universo **A** al hablar de propiedades posibles en $\mathcal{A}$ nos estamos refiriendo a todos los subconjuntos de **A**; es decir, a los elementos de $\mathcal{P}\mathbf{A}$. Pero, ¿tenemos acceso a todas estas propiedades? Si sabemos cuantos elementos tiene **A** también sabemos cuantos elementos hay en $\mathcal{P}\mathbf{A}$, pero en general, a no ser que **A** sea finito, la mayor parte de ellos escapa a nuestra descripción: decir que es un subconjunto de **A** no es decir mucho ya que esta categoría es poco descriptiva. Sin embargo, algunos de esos subconjuntos —en ocasiones los más interesantes— pueden ser descritos en el lenguaje $L(\mathcal{A})$ adecuado al sistema.

La variedad de los subconjuntos definibles dependerá, naturalmente de la riqueza del sistema y su lenguaje asociado. Por ejemplo, si $\mathcal{A}$ fuera un sistema finito y $\bar{\mathbf{a}}$ una enumeración completa de **A**, en $L\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ se encuentra definición para todos los subconjuntos de **A**. Pero cuando **A** es infinito y el sistema es tan pobre que no contiene ni relaciones ni funciones destacadas —es decir, en $\langle \mathbf{A} \rangle$— en su lenguaje apropiado, el $L(\langle \mathbf{A} \rangle)$, no son definibles más que el universo **A** y el vacío.

6.1. Definición

Sea $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \langle \mathbf{f}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j \in J} \rangle$ un sistema. La relación $\mathbf{R}^n \subseteq \mathbf{A}^n$ es definible syss existe una fórmula $\varphi\langle x_1 \ldots x_n \rangle$ (con a lo sumo $x_1, \ldots, x_n$ libres) tal que:

$$\mathbf{R}^n = \{\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle \in \mathbf{A}^n \,/\, \mathcal{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi\} \quad \square$$

Ejemplos

1) Como he dicho anteriormente, en todo sistema $\mathcal{A}$ el universo del sistema es definible pues incluso en el caso más desfavorable, cuando $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A} \rangle$, en el lenguaje apropiado tendremos la igualdad y

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} \,/\, \mathcal{A}[\mathbf{x}] \text{ sat } x = x\}$$

2) Si $\mathfrak{B}$ fuera el sistema finito

$$\mathfrak{B} = \langle \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}, \langle \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \rangle \rangle$$

en su lenguaje apropiado tendremos nombre para cada uno de los $\mathbf{b}_i$ y todos los subconjuntos de $\mathfrak{B}$ son definibles en él.

En efecto,

$$\{\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_l\} = \{\mathbf{x} \,/\, \mathfrak{B}[\mathbf{x}] \text{ sat } x = b_i \vee x = b_j \vee x = b_l\}$$

3) En el sistema $\langle \mathbf{Z}_5, \bar{0}, + \rangle$ son definibles $\mathbf{Z}_5$, $\varnothing$ y $\{\bar{0}\}$ pero no es definible $\{\bar{1}\}$.

La demostración de que un conjunto no es definible puede hacerse utilizando una consecuencia del teorema de isomorfía, el teorema II.6.3 de próxima aparición.

4) En el sistema estándar de los naturales

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, \mathbf{S}, +, \cdot \rangle$$

son definibles, por ejemplo, la relación de orden y el conjunto de los números primos:

a) La relación de orden es definible mediante las fórmula

$$\varphi = x = y \vee \exists z\, x + fz = y$$

ya que

$$\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{N}^2 \,/\, \mathbf{x} \leq \mathbf{y}\} = \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{N}^2 \,/\, \mathcal{N}[\mathbf{xy}] \text{ sat } \varphi\}$$

b) Para definir los números primos utilizamos la fórmula

$$\psi = x \neq fc \wedge \forall yz(x = y \cdot z \rightarrow y = fc \vee z = fc)$$

—como veis, estoy utilizando c, f, $+$ y $\cdot$ como signos para 0, $\mathbf{S}$, $+$, y $\cdot$—.

Entre los conjuntos definibles en $\mathcal{N}$ están: el de los números pares, la relación de divisibilidad y la exponenciación. Puesto que $\mathcal{P}\mathbb{N}$ tiene la cardinalidad del continuo y el lenguaje adecuado a $\mathcal{N}$ es numerable, sabemos por un cálculo sencillo que la mayoría de las relaciones posibles en $\mathcal{N}$ no son definibles en $\mathcal{N}$. Sin embargo, puede decirse que las que habitualmente necesitamos sí que son definibles. La razón es que si estamos interesados en una relación $\mathbf{R}$ es porque sabemos qué es $\mathbf{R}$ y este conocimiento normalmente nos permite crear una fórmula que sirve de definición de $\mathbf{R}$ en $\mathcal{N}$. Además, toda relación decidible es definible.

Un ejemplo de relación no definible es el conjunto de los números de Gödel de las sentencias verdaderas en $\mathcal{N}$ —«Pero esto es otra historia, y debe ser contada en otro lugar», Michael Ende—.

Un ejemplo sencillo de relación no definible es el siguiente:

Sean $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}_1$, ... los subconjuntos definibles de $\mathbb{N}$ y sea

$$\mathbf{Y} = \{n/n \notin \mathbf{X}_n\}$$

Evidentemente, $\mathbf{Y}$ no puede ser definible pues si lo fuera, $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_m$ para un cierto m, pero es fácil comprobar que

$$m \in \mathbf{Y} \text{ syss } m \notin \mathbf{X}_m,$$

lo que constituye una contradicción.

A las relaciones sobre los naturales definibles en $\mathcal{N}$ se las llama también relaciones aritméticas y un problema que se plantea con frecuencia es el de saber en qué medida lo son —pues, como en la Granja de Orwell, aunque todas sean definibles, unas lo son más que otras—. ¿Cómo se mide la definibilidad?

Puesto que las definiciones se establecen mediante fórmulas, parece natural fijarse en ellas para establecer la medición. Puede pensarse que una relación definible mediante una fórmula cortita o sin cuantificadores es más definible que otra que precise una fórmula complicadísima. La idea va un poco por ahí, aunque es «más sutil» que eso. (Solución: La jerarquía aritmética).

Para demostrar que una relación no es definible en un sistema es sumamente útil el siguiente teorema. En él se prueba que siempre que tengamos una relación $\mathbf{R}$ definible en un cierto sistema $\mathcal{A}$ y un automorfismo sobre $\mathcal{A}$ —es decir, un isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}$—, la pertenencia a $\mathbf{R}$ de una tupla de elementos de $\mathbf{A}$ es condición necesaria y suficiente para la pertenencia a $\mathbf{R}$ de la tupla formada por las imágenes mediante el automorfismo de dichos elementos de $\mathbf{A}$.

6.2. Teorema

Si $\mathbf{h}$ es un automorfismo sobre $\mathcal{A}$ y $\mathbf{R}$ una relación n-aria definible en $\mathcal{A}$, entonces, para cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$:

$$\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle \in \mathbf{R} \text{ syss } \langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_n) \rangle \in \mathbf{R}$$

Demostración.

Sea φ la fórmula que define a $\mathbf{R}$ en $\mathcal{A}$; es decir,

$$\mathbf{R} = \{\langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle \,/\, \mathcal{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi\}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \rangle \in \mathbf{R} &\text{ syss } \mathcal{A}\,[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi \\ &\text{ syss } \mathcal{A}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{h}(\mathbf{x}_n)] \text{ sat } \varphi \text{ (corolario II.5.2)} \\ &\text{ syss } \langle \mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{h}(\mathbf{x}_n) \rangle \in \mathbf{R} \ \blacksquare \end{aligned}$$

6.3. Corolario

El conjunto de los números naturales no es definible en el sistema $\mathfrak{R}_< = \langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Demostración

Supongamos que $\mathbb{N}$ fuera definible en $\mathfrak{R}_<$ y que fuera

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \,/\, \mathfrak{R}_< [\mathbf{x}] \text{ sat } \varphi\}$$

Un automorfismo **h** sobre $\mathfrak{R}_<$ es una función creciente; es decir, si $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ entonces $\mathbf{h}(\mathbf{x}) < \mathbf{h}(\mathbf{y})$. Por ejemplo, la función definida así: $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^3$, es un automorfismo, pues además de ser creciente es biyectiva.

De acuerdo con el teorema anterior debiera cumplirse:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{N} \text{ syss } \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in \mathbb{N}$$

Pero $5 = (\sqrt[3]{5})^3 \in \mathbb{N}$ mientras que $\sqrt[3]{5} \notin \mathbb{N}$. Es decir, la función **h** manda a $\mathbb{N}$ elementos de $\mathbb{R}$ que no son de $\mathbb{N}$. ■

6.4. *Ejercicios*

1) Encontrad una fórmula φ de $L(\mathcal{N})$ que defina los números pares.

2) Encontrad una fórmula φ de $L(\mathcal{N})$ que defina la relación de divisibilidad.

3) Sea $\mathscr{A}$ un sistema y φ y ψ dos fórmulas de $L(\mathscr{A})$ tales que $LBR(\varphi) \subseteq \{x\}$ y $LBR(\psi) \subseteq \{x\}$. Demostrad:

a) $\{\mathbf{x} \in \mathbf{A} \,/\, \mathscr{A}[\mathbf{x}] \text{ sat } \neg\varphi\} = \mathbf{A} - \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} \,/\, \mathscr{A}[\mathbf{x}] \text{ sat } \varphi\}$

b) $\{\mathbf{x} \in \mathbf{A} \,/\, \mathscr{A}[\mathbf{x}] \text{ sat } \varphi \vee \psi\} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} \,/\, \mathscr{A}[\mathbf{x}] \text{ sat } \varphi\} \cup \{\mathbf{x} \in \mathbf{A} \,/\, \mathscr{A}[\mathbf{x}] \text{ sat } \psi\}$.

4) Demostrad que si $\mathbf{R}^2$ es definible en $\mathscr{A}$, también lo son:

a) Dom $\mathbf{R}^2$ —el dominio de $\mathbf{R}^2$—.

b) Rec $\mathbf{R}^2$ —el recorrido de $\mathbf{R}^2$—.

c) $\breve{\mathbf{R}}^2$ —la recíproca de $\mathbf{R}^2$—.

d) $\mathbf{R}^2 \circ \mathbf{R}^2$ —la composición de $\mathbf{R}^2$ consigo misma—.

5) Sean **R** y **P** relaciones definibles en $\mathscr{A}$. Decid si son definibles las siguientes:

a) $\mathbf{R} \times \mathbf{P}$ —producto cartesiano—.

b) $\mathbf{R} - \mathbf{P}$ —diferencia—.

c) $\mathbf{R} \cap \mathbf{P}$ —intersección—.

6) ¿Es definible la identidad? Recordad que todos nuestros lenguajes tienen la igualdad.

7) Sea $\mathcal{A}$ un sistema finito que sólo tiene relaciones monarias destacadas —aunque, eso sí las tiene todas— y sea L un lenguaje sin igualdad adecuado a $\mathcal{A}$. ¿Cómo definiríais la identidad en $\mathcal{A}$? ¿Hace falta que en $\mathcal{A}$ estén destacados todos los subconjuntos de **A** o nos podríamos arreglar con menos?

8) ¿Os parece que tiene algo que ver la definibilidad en un sistema y las extensiones mediante definición en una teoría?

9) Sea $\mathcal{A}$ un sistema y **R** una relación sobre su universo. Demostrad que si **R** no fuera definible en $\mathcal{A}$, entonces **R** tampoco sería definible en una reducción de $\mathcal{A}$; es decir, en un sistema $\mathcal{B}$ de universo **A** y con menos funciones y/o relaciones destacadas.

10) Demostrad que $\{0\}$ no es definible en $\langle \mathbb{N} \rangle$.

11) Demostrad que $2\mathbb{N}$ no es definible en $\langle \mathbb{N} \rangle$.

12) Demostrad que la función del siguiente no es definible en $\langle \mathbb{N}, 0 \rangle$.

13) Demostrad que en $\langle \mathbb{Z}_5, \bar{0}, \bar{+} \rangle$ no es definible $\{\bar{1}\}$.

Problema 8

¿Qué subconjuntos de $\mathbb{N}$ son definibles en $\mathcal{N}_S$ mediante fórmulas de $L(\mathcal{N}_S)$ que sean disyunción de fórmulas simples o negación de fórmulas simples?

Problema 9

Demostrad que la relación de adición, $\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle \in \mathbb{N}^3 / \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}\}$ no es definible en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$.

Problema 10

Demostrad que la relación de orden, $<$, es definible en $\langle \mathbb{R}, 0, +, \cdot \rangle$ pero que no lo es en $\langle \mathbb{R}, 0, + \rangle$.

Capítulo III
COMPLETUD DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN

INTRODUCCION

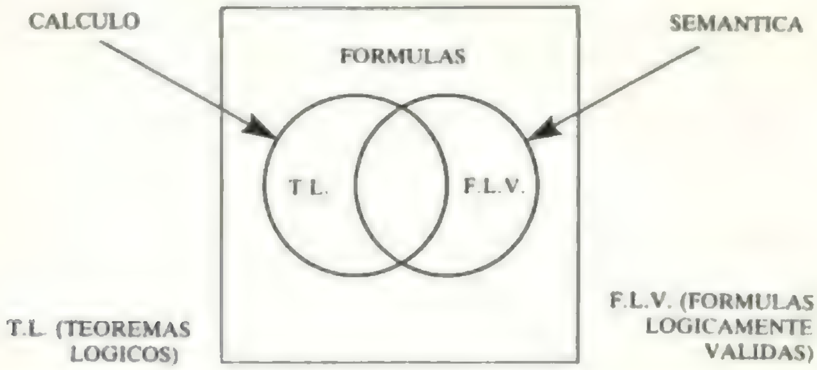
En el capítulo precedente vimos que para hablar de un sistema o de una clase de sistemas es conveniente introducir un lenguaje formal adecuado a cada caso. De entre todas las fórmulas del lenguaje estaremos habitualmente interesados en determinar cuáles son verdaderas en nuestro sistema (o clase de sistemas) y aunque contamos con la noción semántica de verdad, es frecuentemente muy difícil el establecer la verdad de una fórmula apelando simplemente a la verificación directa de las condiciones de verdad. Mucho más difícil todavía es el determinar si una fórmula es consecuencia de un conjunto de fórmulas.

Por fortuna hay otra manera de establecer la verdad de una fórmula, y de determinar si una fórmula es consecuencia de otras, que no es la verificación directa de las condiciones de verdad; se trata de inferir o deducir la fórmula en un cálculo deductivo utilizando las otras fórmulas como premisas o hipótesis: de establecer una cadena de razonamiento entre hipótesis y conclusión. Por supuesto, si el cálculo deductivo nos va a ser de alguna ayuda es porque no nos permitirá equivocarnos nunca; no nos va a conducir jamás de hipótesis verdaderas a conclusiones falsas: será un cálculo correcto.

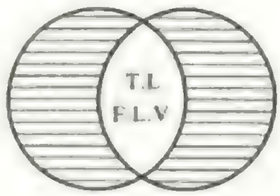
Además, con sus reglas obtendremos como teoremas todas las consecuencias de un conjunto dado de hipótesis: será un cálculo completo.

El problema de la completud lo plantearon inicialmente Post y Hilbert, pero no fue resuelto hasta 1930 por Gödel. La prueba que nosotros seguiremos es la de Henkin de 1949, incorporando las modificaciones posteriores de Hasenjaeger y las de Flum-Ebbinghaus-Thomas. La ventaja de la prueba de Henkin es que es más sencilla y versátil que la original de Gödel. Concretamente, se puede extender, con modificaciones de detalle, a lenguajes de cualquier cardinalidad y también a lenguajes de orden superior.

El teorema de completud establece la equivalencia entre la sintaxis y la semántica de un cierto lenguaje en el siguiente sentido: Toda fórmula lógicamente válida es un teorema lógico. A mí me gusta plantear la cuestión, desde fuera, de esta manera: La noción semántica de verdad selecciona de entre todas las fórmulas a aquellas que son verdaderas en todos los sistemas, y el cálculo deductivo a las que se deducen sin premisas en él.



¿Coinciden estos conjuntos? Demostrar que $TL \subseteq FLV$ es el objetivo del teorema de corrección, demostrar que $FLV \subseteq TL$ lo es del de completud. Cuando el cálculo es correcto y completo, el diagrama aparece así:



Las zonas rayadas están vacías

En realidad, como hemos dicho antes, cuando construímos un cálculo lo que pretendemos es que nos sirva para generar como teoremas lógicos al conjunto de las fórmulas válidas. Completud y corrección nos aseguran que el cálculo está bien construido.

1. CALCULO DEDUCTIVO

Presento muy brevemente el cálculo secuencial de Ebbinghaus, Flum y Thomas. Este cálculo no sólo es equivalente al de deducción natural de Mosterín que vosotros

conoceis —algo normal, incluso obligatorio, ya que todos los cálculos de primer orden tienen que serlo— sino también bastante parecido ya que ambos están basados en el de Hermes. La ventaja del secuencial es que la prueba de corrección es mucho más sencilla.

1.1. Reglas de cálculo

En este capítulo una deducción es una sucesión finita, y no vacía, de líneas cada una de las cuales es una secuencia, finita, no vacía de fórmulas: $\langle \varphi_1 \dots \varphi_n \psi \rangle$ es una secuencia cuyas premisas son $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ y su conclusión es ψ. Abreviadamente pondremos $\Gamma\psi$, siendo $\Gamma = \langle \varphi_1 \dots \varphi_n \rangle$. Llamaremos antecedente a la secuencia de premisas; es decir, a Γ.

Las reglas del cálculo nos permiten pasar de una línea a otra y se formulan de manera que en cada línea la conclusión es consecuencia lógica de las premisas; es decir, si $\Gamma\psi$ es una línea de una deducción, entonces $\Gamma \vDash \psi$.

Las reglas son las siguientes:

1.1.1. (IH) *Regla de introducción de hipótesis*

$$\frac{}{\Gamma\varphi}\text{, si } \varphi \in \Gamma$$

1.1.2. (M) *Regla de monotonía*

$$\frac{\Gamma\varphi}{\Gamma'\varphi}\text{, si } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

1.1.3. (PC) *Regla de la prueba por casos*

$$\begin{array}{l} \Gamma \quad \psi\ \varphi \\ \underline{\Gamma \ \neg\psi\ \varphi} \\ \Gamma \quad \varphi \end{array}$$

1.1.4. (NC) *Regla de no contradicción*

$$\begin{array}{l} \Gamma\ \neg\varphi \quad \psi \\ \underline{\Gamma\ \neg\varphi\ \neg\psi} \\ \Gamma \quad \varphi \end{array}$$

1.1.5. (IDA) *Regla de introducción del disyuntor en el antecedente*

$$\begin{array}{l} \Gamma \quad \varphi \quad \gamma \\ \underline{\Gamma \quad \psi \quad \gamma} \\ \Gamma\ \varphi \vee \psi\ \gamma \end{array}$$

1.1.6. (IDC) *Reglas de introducción del disyuntor en la conclusión*

$$\frac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \varphi \vee \psi} \qquad \frac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \psi \vee \varphi}$$

1.1.7. (IPA) *Regla de introducción del particularizador en el antecedente*

$$\frac{\Gamma\ \mathbf{S}_x^y\,\varphi\ \psi}{\Gamma\ \exists x\varphi\ \ \psi}, \text{ si } y \notin \mathrm{LBR}(\Gamma \cup \{\exists x\,\varphi, \psi\})$$

es decir, y no está libre en ninguna de las fórmulas en juego.

1.1.8. (IPC) *Regla de introducción del particularizador en la conclusión*

$$\frac{\Gamma\ \mathbf{S}_x^\tau\,\varphi}{\Gamma\ \exists x\varphi}$$

1.1.9. (RI) *Regla de reflexividad de la identidad*

$$\frac{}{\tau = \tau}$$

1.1.10. (SI) *Regla de sustitución de iguales*

$$\frac{\Gamma\ \mathbf{S}_x^\tau\,\varphi}{\Gamma\ \tau = \tau'\ \mathbf{S}_x^{\tau'}\,\varphi} \qquad \square$$

1.2. Definición

Si, conforme a las reglas del cálculo, obtenemos como línea la secuencia $\Gamma\varphi$, decimos que $\Gamma\varphi$ es derivable y escribimos $\vdash \Gamma\varphi$.

En general, decimos que una fórmula φ es derivable (o deducible) a partir de un conjunto Φ de fórmulas —y escribimos $\Phi \vdash \varphi$— si y sólo si hay un subconjunto finito de Φ, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, tal que $\vdash \varphi_1 \ldots \varphi_n\ \varphi$. $\square$

1.3. Reglas derivadas de inferencia

Como os habreis dado cuenta, todas las reglas del cálculo están formuladas para un lenguaje sin $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ni $\forall$. Utilizando las equivalencias lógicas del Problema 4 de II se pueden reescribir las fórmulas que contengan estos signos como fórmulas del lenguaje «económico» cuyos signos lógicos son exclusivamente: $\neg$, $\vee$, $\exists$. No obstante, en este apartado introduciré una serie de reglas derivadas de inferencia que nos

simplificarán las pruebas a la par que nos permitirán manejar las fórmulas escritas a la «moda antigua».

Una regla derivada de inferencia no se distingue de una primitiva más que en ser absolutamente prescindible, ¿inútil también? Como veréis, aunque no se aumenta la potencia deductiva del cálculo, se gana mucho en manejabilidad. A diferencia de lo que sucede con las reglas primitivas, las derivadas tienen que ser justificadas, demostrando con las restantes reglas del cálculo que son superfluas. Ahora lo veréis.

1.3.1. *Segunda regla de no contradicción (SNC)*

$$\begin{array}{l} \Gamma\ \ \psi \\ \Gamma\ \neg\psi \\ \hline \Gamma\ \ \varphi \end{array}$$

Justificación de 1.3.1.

$$\begin{array}{llll} 1. & \Gamma & \psi & \text{premisa} \\ 2. & \Gamma & \neg\psi & \text{premisa} \\ 3. & \Gamma\ \neg\varphi & \psi & \text{(M) en 1.} \\ 4. & \Gamma\ \neg\varphi & \neg\psi & \text{(M) en 2.} \\ 5. & \Gamma\ \ \varphi & & \text{(NC) en 3,4.} \end{array}$$

1.3.2. *Regla de transitividad (T)*

$$\begin{array}{l} \Gamma\ \ \varphi \\ \Gamma\ \varphi\ \psi \\ \hline \Gamma\ \ \psi \end{array}$$

1.3.3. *Regla del «modus ponens» (MP)*

$$\begin{array}{l} \Gamma\ \ \varphi \to \psi \\ \Gamma\ \ \varphi \\ \hline \Gamma\ \ \psi \end{array} \quad ;\ \text{es decir,} \quad \begin{array}{l} \Gamma\ \neg\varphi \vee \psi \\ \Gamma\ \varphi \\ \hline \Gamma\ \psi \end{array}$$

1.3.4. *Regla del «modus tollens» (MT)*

$$\begin{array}{l} \Gamma\ \ \varphi \to \psi \\ \Gamma\ \ \neg\psi \\ \hline \Gamma\ \ \neg\varphi \end{array} \quad ;\ \text{es decir,} \quad \begin{array}{l} \Gamma\ \neg\varphi \vee \psi \\ \Gamma\ \neg\psi \\ \hline \Gamma\ \neg\varphi \end{array}$$

Justificación de 1.3.4.

$$\begin{array}{llll} 1. & \Gamma & \neg\,\varphi \vee \psi & \text{premisa} \\ 2. & \Gamma & \neg\psi & \text{premisa} \end{array}$$

3.	Γ		ψ	$\neg\psi$	(M) en 2.
4.	Γ		ψ	ψ	(IH)
5.	Γ		ψ	$\neg\varphi$	(SNC) en 3,4.
6.	Γ		$\neg\varphi$	$\neg\varphi$	(IH)
7.	Γ		$\neg\varphi \vee \psi$	$\neg\varphi$	(IDA) en 6,5.
8.	Γ		$\neg\varphi$		(T) en 1,7.

1.3.5. *Reglas de contraposición (Cp)*

a) $\dfrac{\Gamma\ \ \varphi\ \ \psi}{\Gamma\ \neg\psi\ \neg\varphi}$ b) $\dfrac{\Gamma\ \neg\varphi\ \neg\psi}{\Gamma\ \ \psi\ \ \varphi}$

c) $\dfrac{\Gamma\ \neg\varphi\ \ \psi}{\Gamma\ \neg\psi\ \ \varphi}$ d) $\dfrac{\Gamma\ \ \varphi\ \neg\psi}{\Gamma\ \ \psi\ \neg\varphi}$

Justificación de 1.3.5 b).

1.	Γ		$\neg\varphi$	$\neg\psi$	premisa
2.	Γ	ψ	$\neg\varphi$	ψ	(IH)
3.	Γ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	(M) en 1.
4.	Γ	ψ		φ	(NC) en 2,3.

Justificación de 1.3.5 d)

1.	Γ		φ	$\neg\psi$	premisa
2.	Γ	ψ	φ	$\neg\psi$	(M) en 1.
3.	Γ	ψ	φ	ψ	(IH)
4.	Γ	ψ	φ	$\neg\varphi$	(SNC) en 3,2.
5.	Γ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$	(IH)
6.	Γ	ψ		$\neg\varphi$	(PC) en 4,5.

1.3.6. *Reglas de eliminación del disyuntor (ED)*

$$\dfrac{\begin{array}{l}\Gamma\ \varphi \vee \psi\\ \Gamma\ \neg\varphi\end{array}}{\Gamma\ \ \psi} \qquad \dfrac{\begin{array}{l}\Gamma\ \varphi \vee \psi\\ \Gamma\ \neg\psi\end{array}}{\Gamma\ \ \varphi}$$

1.3.7. *Regla del «tertium non datur» (TND)*

$$\dfrac{\quad}{\varphi \vee \neg\varphi}$$

1.3.8. *Regla de introducción del conyuntor (IC)*

$$\dfrac{\begin{array}{l}\Gamma\ \ \varphi\\ \Gamma\ \ \psi\end{array}}{\Gamma\ \varphi \wedge \psi}\ \text{, esto es, }\ \dfrac{\begin{array}{l}\Gamma\ \varphi\\ \Gamma\ \psi\end{array}}{\Gamma\ \neg(\neg\,\varphi \vee \neg\psi)}$$

Justificación de 1.3.8.

1.	Γ		φ	premisa
2.	Γ		ψ	premisa
3.	Γ	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	φ	(M) en 1.
4.	Γ	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	ψ	(M) en 2.
5.	Γ	$\neg\varphi$	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(Cp) en 3.
6.	Γ	$\neg\psi$	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(Cp) en 4.
7.	Γ	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(IDA) en 5,6.
8.	Γ	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(IH)
9.	Γ		$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(PC) en 7,8.

1.3.9. *Reglas de la doble negación (DN)*

$$\frac{\Gamma\ \varphi}{\Gamma\ \neg\neg\varphi} \qquad \frac{\Gamma\ \neg\neg\varphi}{\Gamma\ \varphi}$$

1.3.10. *Regla de eliminación del generalizador (EG)*

$$\frac{\Gamma\ \forall x\varphi}{\Gamma\ \mathbf{S}^t_x\,\varphi}\ \text{; es decir,}\ \frac{\Gamma\ \neg\exists x\neg\varphi}{\Gamma\ \mathbf{S}^t_x\,\varphi}$$

Justificación de 1.3.10.

1.	Γ	$\neg\exists x\ \neg\varphi$		
2.	Γ	$\neg\mathbf{S}^t_x\,\varphi$	$\neg\exists x\ \neg\varphi$	(M) en 1.
3.	Γ	$\neg\mathbf{S}^t_x\,\varphi$	$\neg\mathbf{S}^t_x\,\varphi$	(IH)
4.	Γ	$\neg\mathbf{S}^t_x\,\varphi$	$\exists x\neg\varphi$	(IPC) en 3.
5.	Γ	$\mathbf{S}^t_x\,\varphi$		(NC) en 2,4.

1.3.11. *Regla de introducción del generalizador en la conclusión (IGC)*

$$\frac{\Gamma\ \mathbf{S}^y_x\,\varphi}{\Gamma\ \forall x\varphi}\ \text{, es decir,}\ \frac{\Gamma\ \mathbf{S}^y_x\,\varphi}{\Gamma\ \neg\exists x\ \neg\varphi}$$

—siendo $y \notin \mathrm{LBR}(\Gamma \cup \{\forall x\varphi\})$—.

1.3.12. *Regla de introducción del generalizador en el antecedente (IGA)*

$$\frac{\Gamma\ \mathbf{S}^t_x\,\varphi\ \psi}{\Gamma\ \forall x\varphi\ \psi}\ \text{; es decir,}\ \frac{\Gamma\ \mathbf{S}^t_x\,\varphi\ \psi}{\Gamma\ \neg\exists x\neg\varphi\ \psi}$$

1.4. *Ejercicios*

1) Justificad cada una de las reglas derivadas de inferencia: (T), (MP), (Cp)a, (Cp)c, (ED), (TND), (DN), (IGC) y (IGA).

2) Justificad las reglas de eliminación del conyuctor (EC)

$$\frac{\Gamma\ \varphi \wedge \psi}{\Gamma\ \varphi} \qquad \frac{\Gamma\ \varphi \wedge \psi}{\Gamma\ \psi}\ ;\ \text{es decir,}\ \frac{\Gamma\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}{\Gamma\ \varphi}$$

$$\text{y}\ \frac{\Gamma\ \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)}{\Gamma\ \psi}$$

3) Formulad las reglas de introducción del conyuntor en el antecedente y en la conclusión (ICA), (ICC).

4) Justificad la regla del paso de la negación del condicional a la conyunción (NCC).

$$\frac{\Gamma\ \neg\ (\varphi \rightarrow \psi)}{\Gamma\quad \varphi \wedge \neg\psi}$$

5) Formulad las reglas de introducción y eliminación del bicondicionador (IB), (EB).

6) Demostrad: $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

7) Sea $\Gamma = \{\forall x\ fxa = b,\ \forall x\ (Rxb \vee Rbx)\}$ y $\varphi = \forall x\ Rfxa\ fxa$.
Demostrad que $\Gamma \vdash \varphi$.

8) Sea $\Gamma = \{\forall x\ (Rx \rightarrow fx = a),\ \forall x\ (\neg Rx \rightarrow fx = a)\}$ y $\varphi = \forall x\ fx = a$.
Demostrad que $\Gamma \vdash \varphi$.

9) Sea $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, los axiomas de la teoría de grupos (ver II.3.2), y sea $\varphi = \forall yxz\ (x + y = z + y \rightarrow x = z)$. Demostrad que $\Gamma \vdash \varphi$.

10) Sea $\psi = \exists y\ \forall x\ (\varphi(x) \leftrightarrow x = y) \leftrightarrow \exists^1 x\varphi(x)$ —siendo $\varphi \in$ FOR(L), $x \in$ LBR(φ), $y \notin$ LBR(φ) $\cup$ LIG(φ)—. Demostrad que $\vdash \psi$.

11) Sea $\gamma = \exists x\ \varphi\ (x) \wedge \forall\ yz\ (\varphi(y) \wedge \varphi\ (z) \rightarrow y = z) \leftrightarrow \exists^1 x\ \varphi(x)$ —siendo φ como en el ejercicio 10—. Demostrad que $\vdash\gamma$.

Problema 1

Formulad y justificad la regla de eliminación del particularizador.

Problema 2

La regla (RI) establece la reflexividad de la igualdad. ¿Es también, como cabría esperar, simétrica y transitiva?

2. NOCIONES SINTACTICAS

En este apartado voy a introducir las nociones de consistencia, consistencia máxima y ejemplificación. Todas ellas son propiedades de fórmulas o de conjuntos de fórmulas y se definen utilizando la noción sintáctica de derivabilidad; es decir, el cálculo deductivo. Lo que se pretende es introducir la consistencia como una contrapartida sintáctica a la propiedad semántica de «tener un modelo».

Diremos que un conjunto de fórmulas es contradictorio cuando a partir de él se puede demostrar cualquier fórmula, y que es consistente en caso contrario. Por otra parte, diremos que es máximamente consistente cuando no sólo es consistente, sino que además tiene la propiedad de que si se le añadiera una fórmula, se convertiría en contradictorio.

Por último, un conjunto de fórmulas es ejemplificado cuando cada particularización está avalada por un ejemplo o testigo. Quiere esto decir que siempre que haya en el conjunto una particularización, $\exists x\varphi$, habrá también otra fórmula, $S_x^\tau\ \varphi$, que es el resultado de sustituir en el núcleo de la particularización la variable particularizada por un término.

Los conjuntos máximamente consistentes y ejemplificados describen perfectamente sus modelos, pudiéndose definir a éstos como una especie de copia semántica de las fórmulas. Esto es precisamente lo que haremos para demostrar el teorema de Henkin, la pieza clave en la demostración de la completud.

2.1. Definición

$\Delta \subseteq FOR(L)$ es contradictorio syss para cada $\varphi \in FOR(L)$ se cumple: $\Delta \vdash \varphi$. □

2.2. Definición

$\Delta \subseteq FOR(L)$ es consistente syss Δ no es contradictorio. □

2.3. Definición

$\Delta \subseteq FOR(L)$ es máximamente consistente syss Δ es consistente y para cada $\varphi \in FOR(L)$ se cumple: si $\varphi \notin \Delta$ entonces $\Delta \cup \{\varphi\}$ es contradictorio. □

2.4. Definición

$\Delta \subseteq FOR(L)$ es ejemplificado syss para cada particularización, $\exists x\varphi$, se cumple: si $\exists x\varphi \in \Delta$ entonces hay un término τ tal que $S_x^\tau\ \varphi \in \Delta$. □

2.5. Teoremas sobre consistencia máxima

Sea $\Delta \subseteq FOR(L)$ un conjunto máximamente consistente y φ, $\psi \in FOR(L)$. Se verifica lo siguiente:

i) Si $\Delta \vdash \varphi$, entonces $\varphi \in \Delta$

ii) Si $\vdash \varphi$, entonces $\varphi \in \Delta$

iii) $\neg\varphi \in \Delta$ syss $\varphi \notin \Delta$

iv) $\varphi \wedge \psi \in \Delta$ syss $\varphi \in \Delta$ y $\psi \in \Delta$

v) $\varphi \vee \psi \in \Delta$ syss $\varphi \in \Delta$ o $\psi \in \Delta$

vi) $\varphi \rightarrow \psi \in \Delta$ syss: si $\varphi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$

vii) $\varphi \leftrightarrow \psi \in \Delta$ syss: $\varphi \in \Delta$ syss $\psi \in \Delta$

Demostraré los números pares, los nones os los dejo como ejercicio.

Demostración de ii) Sea $\vdash\varphi$. En este caso, $\Delta \vdash \varphi$ (ya que por la regla de monotonía, (M), de φ se puede pasar a $\Delta\varphi$) Utilizando III.2.5.i), obtenemos que $\varphi \in \Delta$.

Demostración de iv) [$\Rightarrow$] Supongamos que $\varphi \wedge \psi \in \Delta$. Por las reglas de (E.C.) (III.1.4, ejercicio 7), tenemos $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ y $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$. Por la regla de monotonía, $\Delta \vdash \varphi$ y $\Delta \vdash \psi$. Utilizando III.2.5.i), obtenemos: $\varphi \in \Delta$ y $\psi \in \Delta$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $\varphi \in \Delta$ y que $\psi \in \Delta$. Utilizando la regla (IC) obtenemos φ, $\psi \vdash \varphi \wedge \psi$. De aquí, por (M), se sigue que $\Delta \vdash \varphi \wedge \psi$. Por III.2.5.i) obtenemos: $\varphi \wedge \psi \in \Delta$.

Demostración de vi) [$\Rightarrow$] Supongamos que $\varphi \rightarrow \psi \in \Delta$. Si $\varphi \in \Delta$, entonces, puesto que $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \vdash \psi$ por (MP), tendríamos que $\Delta \vdash \psi$ por (M) y por lo tanto que $\psi \in \Delta$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que se cumple que si $\varphi \in \Delta$ entonces $\psi \in \Delta$. Hay dos posibilidades: que $\varphi \notin \Delta$ o que $\psi \in \Delta$. En el primer caso, $\neg\varphi \in \Delta$ por III.2.5.iii). Y puesto que $\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (III.1.4, ejercicio 8), $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi$ por (M). De donde por III.2.5.i) obtenemos: $\varphi \rightarrow \psi \in \Delta$.

En el segundo caso, puesto que $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (III.1.4, ejercicio 9), tendremos que $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi$ por (M). De aquí se sigue por III.2.5.i) que $\varphi \rightarrow \psi \in \Delta$. ■

2.6. Teoremas sobre ejemplificación

Si $\Delta \subseteq$ FOR(L) es máximamente consistente y ejemplificado, se verifica:

i) $\exists x\varphi \in \Delta$ syss hay un término τ tal que $S^{\tau}_{x}\ \varphi \in \Delta$.

ii) $\forall x\ \varphi \in \Delta$ syss para cada término τ se verifica que $S^{\tau}_{x}\ \varphi \in \Delta$.

Demostración de i). Si $\exists x\varphi \in \Delta$, por ser ejemplificado, hay un término τ tal que $S^{\tau}_{x}\ \varphi \in \Delta$.

Supongamos que $S^{\tau}_{x}\ \varphi \in \Delta$. Puesto que $S^{\tau}_{x}\ \varphi \vdash \exists x\varphi$ por (IPC), también $\Delta \vdash \exists x\varphi$ por (M). De donde, por III.2.5.i), que sigue que $\exists x\varphi \in \Delta$. ■

2.7. *Ejercicios*

1) Demostrad los apartados que faltan de III.2.5.

2) Demostrad 2.6.ii).

3) Demostrad que si Δ es consistente y $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces Γ es consistente.

4) Demostrad que si Δ es contradictorio y $\Delta \subseteq \Gamma$, entonces Γ es contradictorio.

5) Sea Δ máximamente consistente y ejemplificado. Añadamos al lenguaje L, en dónde están escritas las fórmulas de Δ la constante c. ¿Es, respecto de L $\cup$ {c}, Δ máximamente consistente? ¿Y ejemplificado?

Problema 3

Demostrad que un conjunto $\Delta \subseteq$ FOR(L) es consistente si y sólo si cada subconjunto finito de Δ es consistente.

Problema 4

Sea $\Gamma = \{x = \tau \,/\, \tau \in \text{TER(L)}\} \cup \{\exists xy\, x \neq y\}$.

Demostrad que Γ es consistente pero que no hay un Γ^* tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^* \subseteq$ FOR(L) tal que Γ^* es consistente y ejemplificado.

Problema 5

Demostrad que si Δ es consistente, $\exists x\ \varphi \in \Delta$ y $z \notin$ LBR(Δ) entonces $\Delta \cup \{S^{z}_{x}\ \varphi\}$ es consistente.

3. CORRECCION DEL CALCULO DEDUCTIVO

El que un cálculo deductivo sea correcto significa que no nos inducirá a error en el siguiente sentido: no nos llevará nunca de premisas verdaderas a conclusiones falsas. Es decir, si φ es deducible a partir de un conjunto Φ de fórmulas, también φ será consecuencia lógica de ellas.

3.1. Teorema de corrección

Para cada $\Phi \subseteq FOR(L)$ y cada $\varphi \in FOR(L)$ se verifica: si $\Phi \vdash \varphi$ entonces $\Phi \models \varphi$.

Demostración

Sea $\Phi \vdash \varphi$. Habrá por lo tanto (III.1.2) una secuencia finita de fórmulas Γ^* cuyos elementos $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi$ tal que $\vdash \Gamma^*\varphi$; es decir, $\Gamma^*\varphi$ es una secuencia de nuestro cálculo. La clave está en demostrar que en esa situación $\Gamma^* \models \varphi$ (pues de aquí se seguiría que $\Phi \models \varphi$, puesto que $\Gamma^* \subseteq \Phi$).

En definitiva, tenemos que ver que todas las secuencias del cálculo son correctas; es decir, que de $\vdash \Gamma^*\varphi$ se sigue $\Gamma^* \models \varphi$.

En particular, tendremos que demostrar que las reglas sin premisas del cálculo nos conducen a secuencias correctas y que las otras reglas nos llevan de secuencias correctas a secuencias correctas.

3.1.1. *Corrección de (IH)*

Trivialmente, si $\varphi \in \Gamma$, entonces $\Gamma \models \varphi$.

3.1.2. *Corrección de (M)*

Si la secuencia $\Gamma\varphi$ es correcta y $\Gamma \subseteq \Gamma'$, puesto que $\Gamma \models \varphi$, también $\Gamma' \models \varphi$.

3.1.3. *Corrección de (PC)*

Supongamos que las secuecias $\Gamma\ \psi\ \varphi$ y $\Gamma\ \neg\psi\ \varphi$ son ambas correctas. De aquí se sigue que también $\Gamma\varphi$ lo es. (Recordad el ejercicio de II.2.8 que dice: Si $\Gamma\ \psi \models \varphi$ y $\Gamma\ \neg\psi\ \models \varphi$, entonces $\Gamma \models \varphi$).

3.1.4. *Corrección de (NC)*

3.1.5. *Corrección de (IDA)*

3.1.6. *Corrección de (IDC)*

3.1.7. *Corrección de (IPA)*

Supongamos que la secuencia $\Gamma\ S^y_x\ \varphi\ \psi$ es correcta. Es decir, $\Gamma\ S^y_x\ \varphi \vDash \psi$. Además, y no está libre en ninguna de las fórmulas de Γ, ni en ψ, ni en $\exists x\varphi$. Queremos demostrar que $\Gamma\exists x\varphi \vDash \psi$; es decir, que toda interpretación que es modelo de $\Gamma\ \exists x\varphi$ lo es también de ψ.

Sea $\mathcal{A}\mathcal{I}$ una interpretación que es modelo de $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$. Por ser modelo de $\exists x\varphi$ habrá un $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x}$ sat φ. De aquí se sigue que $\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}_{yx}$ sat φ. (Por el ejercicio 1 de II.4.3, si $x \neq y$; puesto que $y \notin \mathrm{LBR}(\varphi)$. Si $x = y$, es trivialmente cierto).

Por consiguiente, $\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{x}\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{y}(y)}_{yx}$ sat φ. (Porque $\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{y}(y) = \mathbf{x}$).

Por lo tanto, $\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{y}$ sat $S^y_x\ \varphi$. (Por II.4.2; el teorema de sustitución).

Es fácil ver que puesto que $y \notin \mathrm{LBR}(\Gamma)$ y $\mathcal{A}\mathcal{I}$ es modelo de Γ, $\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{y}$ es también modelo de Γ (II.4.3, ejercicio 1).

Por consiguiente, $\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{y}$ sat ψ (ya que la hipótesis inicial era $\Gamma\ S^y_x\ \varphi \vDash \psi$).

Pero $y \notin \mathrm{LBR}(\psi)$ y entonces también $\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat ψ (por II.4.3, ejercicio 1).

3.1.8. *Corrección de (IPC)*

3.1.9. *Corrección de (RI)*

3.1.10. *Corrección de (SI)* ■

3.2. Teorema del test de consistencia

Si $\Gamma \subseteq \mathrm{FOR(L)}$ es satisfacible, entonces Γ es consistente.

Demostración

Supongamos que Γ fuera contradictorio. Habría que ver que entonces Γ sería insatisfacible.

Sabemos que ninguna interpretación puede ser modelo de una fórmula y de su negación, por definición de satisfacción de fórmulas. Pero si Γ es contradictorio, $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$, pues toda fórmula es deducible a partir de Γ en esta tesitura. De donde se sigue, por el teorema de corrección, que $\Gamma \vDash \varphi \wedge \neg\varphi$. Esto es imposible, a no ser que Γ sea insatisfacible. ■

3.3. *Ejercicios*

1) Demostrad 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.8, 3.1.9 y 3.1.10.

2) Determinad cuales de las reglas siguientes son correctas

a) $\dfrac{\Gamma\ \mathbf{S}_x^y\ \varphi}{\Gamma\ \forall x\varphi}$ (es la 1.3.11 pero quitando la condición referente a la variable y)

b) $\dfrac{\varphi \quad \psi}{\exists x\varphi\ \exists x\psi}$

c) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi \quad \psi}{\Gamma\ \exists x\varphi\ \exists x\psi}$

3) Escoged cuatro de las reglas derivadas de inferencia y demostrad que son correctas.

Problema 6

Sea Δ un conjunto de fórmulas que tiene la propiedad de que cada subconjunto finito suyo tiene un modelo. ¿Se puede aventurar algo acerca de la consistencia de Δ?

4. TEOREMA DE COMPLETUD (LENGUAJES NUMERABLES)

En este apartado vamos a demostrar el teorema de completud, que enunciamos diciendo:

Si $\Gamma \vDash \varphi$, entonces $\Gamma \vdash \varphi$, siendo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq$ FOR(L).

La prueba que sigue será para un lenguaje numerable; es decir, los signos peculiares de L constituyen un conjunto cuya cardinalidad no excede a la de los naturales. No obstante, es fácil obtener la prueba de manera que valga para lenguajes de cualquier cardinalidad, aunque para ello necesitamos utilizar el teorema del buen orden, que es equivalente al de elección. Al final del capítulo indicaré en qué momento hay que usar el teorema del buen orden y cómo se modifica la prueba para lenguajes no numerables.

Una novedad de la prueba que presento es que vale para conjuntos de fórmulas cualesquiera y no sólo para sentencias. He articulado la demostración de la siguiente manera.

4.1. Organigrama del Teorema de completud

Teorema de Henkin: $\Gamma \subseteq FOR(L)$ consistente $\Rightarrow$
$\downarrow$ Γ tiene un modelo numerable

Teorema de Gödel: $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$
$\downarrow$

Corolario: $\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$

Lema de Lindenbaum: $\Gamma \subseteq FOR(L)$ consistente y $LBR(\Gamma)$ finito $\Rightarrow$ hay un Γ^* máximamente consistente y ejemplificado tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^* \subseteq FOR(L)$

Lema de Henkin: Γ^* máximamente consistente y ejemplificado $\Rightarrow$ Γ^* tiene un modelo numerable.

Corolario: $\Gamma \subseteq FOR(L)$ consistente y $LBR(\Gamma)$ finito $\Rightarrow$ Γ tiene un modelo numerable.

Lema. Si $\Gamma \subseteq FOR(L)$ y $\bar{\Gamma} \subseteq SEN(L \cup \{c_1, c_2, \ldots\})$ es la clase formada por las fórmulas de Γ que resultan de sustituir las variables libres por constantes nuevas, y si $\bar{\Gamma}$ tiene un modelo numerable, entonces Γ también lo tendrá.

Teorema de Compacidad

Teorema Löwenheim-Skolem

Antes de demostrar el teorema de completud es importante entender la estrategia de la demostración, cómo se articulan los diversos lemas que lo componen.

Lo primero que haremos es comprobar que el teorema de Henkin es condición suficiente del de completud de Gödel. De esta forma se evidencia que lo realmente importante en la prueba del teorema de completud es demostrar que todo conjunto consistente tiene un modelo y, consecuentemente, centramos nuestro interés en la construcción del mismo. Visto esto, no es difícil entender el resto del entramado de la prueba, pues el teorema de Henkin se sigue del corolario en cuanto encontramos el modo de prescindir de la condición de que las variables libres del conjunto constituyen un conjunto finito. A su vez, el corolario se sigue de los lemas de Lindenbaum y de Henkin de forma obvia.

Para demostrar el lema de Lindenbaum ordeno las fórmulas del lenguaje y construyo inductivamente una cadena infinita de conjuntos consistentes y ejemplificados cuya gran unión resulta ser máximamente consistente y ejemplificado. El poder ordenar las fórmulas del lenguaje es fundamental, pues sobre dicha ordenación se basa la construcción de la cadena de conjuntos consistentes y ejemplificados. Es por eso que cuando el lenguaje es de cardinalidad más que numerable, necesitamos el axioma de elección. La meta del lema de Lindenbaum es muy simple: se trata de extender el conjunto de fórmulas de partida incluyendo en él a todas las que no lo

convierten en contradictorio y en añadir testigos o ejemplificaciones para cada particularización.

Demuestro a continuación el lema de Henkin, que dice que todo conjunto de fórmulas máximamente consistente y ejemplificado tiene un modelo. La idea es construir el modelo que las fórmulas del conjunto están describiendo y el «quid» de la cuestión está en que los conjuntos máximamente consistentes y ejemplificados describen con grandísimo detalle las funciones y relaciones del modelo requerido al proporcionarnos algo así como «las tablas» de las operaciones del modelo. ¿Qué individuos constituyen el universo del modelo? Sabemos que en general —y está es la filosofía que se desprende del teorema de isomorfía— la naturaleza de los objetos del universo de un modelo es irrelevante, lo importante son las relaciones que se mantienen entre ellos. Nosotros utilizaremos a los términos del lenguaje como individuos del universo del sistema.

Así pues, tenemos un conjunto Γ^* máximamente consistente y ejemplificado y queremos construir un sistema cuyos objetos mantengan entre sí las relaciones patentes en las fórmulas de Γ^*.

En una primera aproximación se puede construir un sistema

$$\mathfrak{B} = \langle \mathrm{TER(L)}, \langle \mathbf{g}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{S}_j \rangle_{j \in J} \rangle$$

en donde:

i) Su universo es el conjunto de los términos del lenguaje.

ii) Para cada functor f_i de L: $\mathbf{g}_i(\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}) = f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}$, para cada $\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)} \in$ TER(L).

iii) Para cada relator R_j de L: $\langle \tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{S}_j$ syss $R_j\, \tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)} \in \Gamma^*$, para cada $\tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)} \in$ TER(L).

Es decir, el valor de $\mathbf{g}_i$ para los términos $\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}$ es el término functorial $f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}$. Además, los términos $\tau_1, \ldots, \tau_{\delta(i)}$ están relacionados mediante $\mathbf{S}_j$ si nuestro oráculo Γ^* dice que lo están.

Este sistema serviría para un lenguaje sin igualdad. Pero si la tuviéramos, podríamos encontrarnos con términos distintos τ_1, τ_2 —es decir, distintas filas de signos— tales que la fórmula que dice que son iguales está en Γ^*. Como queremos que el modelo lo sea de Γ^*, necesitaríamos que $\mathfrak{B}(\tau_1) = \mathfrak{B}(\tau_2)$ y pudiera no ser éste el caso.

Para solucionar este problema lo que haremos es establecer la siguiente relación de equivalencia: $\tau_1 \sim \tau_2$ syss $\tau_1 = \tau_2 \in \Gamma^*$. Es decir, $\sim$ es la relación de igualdad en nuestro mundo, la descrita en Γ^*. Es fácil comprobar que la relación $\sim$ es también una congruencia sobre $\mathfrak{B}$ y que por consiguiente podemos construir el sistema cociente $\mathfrak{B}/\sim$.

Con esto termina, salvo pequeños detalles, la demostración del teorema de completud. De dicho teorema se siguen dos importantes corolarios: el teorema de compacidad y el de Löwenheim-Skolem.

4.2. Teorema de Gödel: Completud del Cálculo

Si $\Gamma \vDash \varphi$, entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

Demostración

Siguiendo el organigrama presentado en 4.1, demostraré sencillamente que si se cumple el Teorema de Henkin, el de Gödel se cumplirá también. Supongamos, pues, que se cumple el Teorema de Henkin.

Si $\Gamma \vDash \varphi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible. La razón es que no puede haber un modelo de φ y de $\neg\varphi$ simultáneamente; sabemos, además, que todos los modelos de Γ lo son también de φ. Pero entonces $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente, por el teorema de Henkin.

En este caso, $\Gamma\ \neg\varphi \vdash \varphi$, pues a partir de un conjunto inconsistente se demuestra toda fórmula.

Por consiguiente, $\Gamma \vdash \varphi$. (Para demostrarlo bastará con utilizar las reglas (IH) y (PC).)

Hemos visto, pues, que caso de ser cierto el teorema de Henkin, el de completud lo será también. ■

4.3. Corolario

Si $\vDash \varphi$, entonces $\vdash \varphi$.

4.4. Lema de Lindenbaum

Si $\Gamma \subseteq \mathrm{FOR}(L)$ es consistente y $\mathrm{LBR}(\Gamma)$ es finito, entonces hay un Γ^* máximamente consistente y ejemplificado tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Demostración

Queremos efectuar una extensión de Γ a un conjunto máximamente consistente y ejemplificado.

Sea $\Gamma \subseteq \mathrm{FOR}(L)$ consistente y $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ una enumeración de las fórmulas de L.

Vamos a construir por inducción una familia $\langle \Gamma_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ de conjuntos de fórmulas de L.

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

Supongamos que Γ_n ha sido construido y formemos Γ_{n+1}.

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n, \text{ si } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ es contradictorio.} \\ \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}, \text{ si dicho conjunto es consistente y } \varphi_n \text{ no es una particularización.} \\ \Gamma_n \cup \{\varphi_n, \mathbf{S}_x^y\, \psi\}, \text{ si } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ es consistente, } \varphi_n = \exists x\psi \text{ la variable} \\ y \notin LBR(\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}) \text{ y es la de menor índice que lo cumple} \end{cases}$$

Sea $\Gamma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$

Ahora veremos que Γ^* tiene las propiedades deseadas.

4.4.1. *Proposición* $\Gamma \subseteq \Gamma^*$

Evidente.

4.4.2. *Proposición:* Para cada n: Γ_n es consistente.

La demostración la haré por inducción.
Sea $M = \{n \in \mathbb{N} \,/\, \Gamma_n \text{ es consistente}\}$.
Evidentemente, $0 \in M$ pues Γ es consistente por hipótesis.
Supongamos que $n \in M$ y veamos que $n + 1 \in M$.
Es decir, veremos que si Γ_n es consistente, Γ_{n+1} lo tiene que ser también. Hay tres posibilidades.

1) $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$. En cuyo caso Γ_{n+1} es consistente por hipótesis de inducción.
2) $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$. En este caso Γ_{n+1} es consistente por construcción.
3) $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\, \mathbf{S}_x^y\, \psi\}$ siendo $\varphi_n = \exists x\psi$ y $y \notin LBR(\Gamma_n \cup \{\varphi_n\})$. En este caso Γ_{n+1} es consistente (Problema 5 de III). Hemos exigido que en Γ sólo hubiera un número finito de variables libres para asegurarnos que siempre habrá variables nuevas de quienes echar mano. Pensad en el Problema 4 de III.

Por consiguiente, $M = \mathbb{N}$ (inducción finita).

4.4.3. *Proposición:* Γ^* es consistente

Supongamos que Γ^* fuera contradictorio. En tal caso, $\Gamma^* \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ para $\varphi \in FOR(L)$. Por III.1.2 sabemos que hay una sucesión de fórmulas de Γ^* tal que $\vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n\ \varphi \wedge \neg\varphi$. Por ser elementos de Γ^*, cada una de estas fórmulas estará en

algún Γ_k. Pero, tal y como hemos definido a los Γ_k, forman una cadena ordenada por inclusión: $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \dots \Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1} \subseteq \dots$

Sea Γ_i el conjunto de menor índice en donde están todas las fórmulas φ_j (con $1 < j < n$), este conjunto existe seguro. Pero si $\vdash \varphi_i \dots \varphi_n\ \varphi \wedge \neg\varphi$, también $\vdash \Gamma_i\ \varphi \wedge \neg\varphi$ por la regla de monotonía (M). Esto contradice la proposición previamente demostrada de que todos los Γ_n son consistentes.

4.4.4. *Proposición:* Γ^* es máximamente consistente

Sabemos de antemano que consistente lo es. Ahora demostraremos que caso de añadirle una fórmula, $\varphi \in FOR(L) - \Gamma^*$, el resultado sería un conjunto contradictorio.

Sea $\varphi \in FOR(L) - \Gamma^*$.

Por ser una fórmula del lenguaje, ocupará un lugar en nuestra enumeración, digamos $\varphi = \varphi_m$. Sabemos que $\varphi_m \notin \Gamma_{m+1}$ pues en caso contrario $\varphi_m \in \Gamma^*$. Pero conforme a nuestra construcción, $\Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$ es contradictorio ya que en caso contrario φ_m estaría en Γ_{m+1}. Puesto que $\Gamma_m \cup \{\varphi_m\} \subseteq \Gamma^* \cup \{\varphi_m\}$, hemos demostrado que $\Gamma^* \cup \{\varphi_m\}$ es contradictorio.

4.4.5. *Proposición:* Γ^* es ejemplificado

Sea $\exists x\psi \in \Gamma^*$. En tal caso, $\exists x\psi \equiv \varphi_j$ pues necesariamente ocupará un lugar en la enumeración. Además, $\exists x\psi \in \Gamma_{j+1}$, pues las fórmulas tienen una única oportunidad de entrar a formar parte de la cadena $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \dots$, si no estaban ya en Γ.

Claramente, $\Gamma_j \cup \{\exists x\psi\}$ es consistente por serlo Γ^* y por lo tanto,

$$\Gamma_{j+1} = \Gamma_j \cup \{\exists x\psi, \mathbf{S}_x^y\ \psi\}$$

por construcción.

Por consiguiente, Γ^* es ejemplificado. ■

4.5. Lema de Henkin

Si Γ^* es máximamente consistente y ejemplificado, entonces Γ^* tiene un modelo numerable.

Demostración

Sea $\Gamma^* \subseteq FOR(L)$ máximamente consistente y ejemplificado. Puesto que en L tenemos la igualdad, habremos de construir un sistema cociente. Para hacerlo definamos previamente una relación de equivalencia en el conjunto TER(L).

Definición: $\tau_1 \sim \tau_2$ syss $\tau_1 = \tau_2 \in \Gamma^*$, para cada $\tau_1, \tau_2 \in$ TER(L).

Fácilmente se comprueba que la relación $\sim$ es de equivalencia y que es una congruencia en el sistema

$$\mathfrak{R} = \langle \text{TER(L)}, \langle \mathbf{g}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{S}_j \rangle_{j \in J} \rangle$$

que definí en III.4.1. Lo veremos a continuación.

4.5.1. *Proposición:* La relación $\sim$ es de equivalencia.

En efecto, $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

1) $\sim$ es reflexiva. Para cada $\tau \in$ TER(L), $\vdash \tau = \tau$ (por (RI)). Puesto que Γ^* es máximamente consistente, $\tau = \tau \in \Gamma^*$ (II.2.5.ii)).

2) $\sim$ es simétrica. Hay que demostrar que para cada $\tau_1, \tau_2 \in$ TER(L): si $\tau_1 = \tau_2 \in \Gamma^*$ entonces $\tau_2 = \tau_1 \in \Gamma^*$.

3) $\sim$ es transitiva. Hay que demostrar que para cada $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in$ TER(L): si $\tau_1 = \tau_2 \in \Gamma^*$ y $\tau_2 = \tau_3 \in \Gamma^*$ entonces $\tau_1 = \tau_3 \in \Gamma^*$.

Sea $\mathfrak{R}$ el sistema definido así

$$\mathfrak{R} = \langle \text{TER(L)}, \langle \mathbf{g}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{S}_j \rangle_{j \in J} \rangle$$

donde:

1) Para cada $i \in I$, $\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)} \in$ TER(L):

$$\mathbf{g}_i(\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}) = f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}$$

2) Para cada $j \in J$, $\tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)} \in$ TER(L):

$$\langle \tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{S}_j \text{ syss } R_j\tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)} \in \Gamma^*$$

4.5.2. *Proposición:* La relación $\sim$ respeta las funciones de $\mathfrak{R}$.

Queremos demostrar que para cada $i \in I$ se verifica si:

$$\tau_k \sim t_k \; (1 \leq k \leq \mu(i))$$

entonces

$$\mathbf{g}_i(\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}) \sim \mathbf{g}_i(t_1, \ldots, t_{\mu(i)})$$

Supongamos, pues que $\tau_k \sim t_k$ para cada k.

Por consiguiente, $\tau_k = t_k \in \Gamma^*$. Usando la regla (SI) es fácil demostrar por inducción que para cada $k(1 \leq k \leq \mu(i))$

$$\Gamma^* \vdash f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)} = f_it_1 \ldots t_k\tau_{k+1} \ldots \tau_{\mu(i)}$$

De aquí se sigue que $f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)} = f_it_1 \ldots t_{\mu(i)} \in \Gamma^*$ (III.2.5.1).

Por consiguiente, $f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)} \sim f_it_1 \ldots t_{\mu(i)}$.

Pero esto es justamente lo que queríamos demostrar, ya que

$$\mathbf{g}_i(\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}) = f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}$$

4.5.3. *Proposición:* La relación $\sim$ respeta las relaciones de $\mathcal{B}$.

Queremos demostrar que para cada $j \in J$ se verifica:

si $\tau_k \sim t_k$ $(1 \leq k \leq \delta(j))$

entonces $\langle \tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{S}_j$ syss $\langle t_1, \ldots, t_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{S}_j$

Supongamos que $\tau_k \sim t_k$ para cada k. De ello se sigue que $\tau_k = t_k \in \Gamma^*$. Como en la proposición anterior, es fácil demostrar por inducción que para cada k $(1 \leq k \leq \delta(j))$

$$\Gamma^* \vdash R_j\tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)} \leftrightarrow R_jt_1 \ldots t_k\tau_{k+1} \ldots \tau_{\delta(j)}$$

De aquí se sigue que $R_j\, \tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)} \leftrightarrow R_j\, t_1 \ldots t_{\delta(j)} \in \Gamma^*$ (III.2.5.i). Por consiguiente,

$$R_j\, \tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)} \in \Gamma^* \text{ syss } R_j\, t_1 \ldots t_{\delta(j)} \in \Gamma^*$$

(III.2.5.viii).

Pero, por definición de $\mathbf{S}_j$ tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{S}_j \quad & \text{syss } R_j\, \tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)} \in \Gamma^* \\ & \text{syss } R_j\, t_1, \ldots, t_{\delta(j)} \in \Gamma^* \\ & \text{syss } \langle t_1, \ldots, t_{\delta(j)} \rangle \in \mathbf{S}_j \end{aligned}$$

4.5.4. *Definición del sistema $\mathcal{A}$*

$\mathcal{A} = \langle \text{TER(L)}/\!\sim, \langle \mathbf{f}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j \in J} \rangle$ donde

i) TER(L)/~ es el cociente de TER(L) bajo ~. Denotamos mediante $[\tau]$ a la clase de equivalencia de τ bajo ~.

ii) Para cada $i \in I$: $\mathbf{f}_i = \mathbf{g}_i/\sim$; es decir,

$$\mathbf{f}_i([\tau_1], \ldots, [\tau_{\mu(i)}]) = \mathbf{g}_i/\sim(\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}) = [f_i\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}]$$

iii) Para cada $j \in J$: $\mathbf{R}_j = \mathbf{S}_j/\sim$; es decir,

$$\mathbf{R}_j = \{\langle[\tau_1], \ldots, [\tau_{\delta(j)}]\rangle / \langle\tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)}\rangle \in \mathbf{S}_j\} =$$
$$= \{\langle[\tau_1], \ldots, [\tau_{\delta(j)}]\rangle / R_j\tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)} \in \Gamma^*\} \quad \square$$

Al sistema $\mathcal{A}$ se le denomina sistema cociente de $\mathcal{B}$ bajo $\sim$. Puesto que la relación de equivalencia utilizada respeta las funciones y relaciones de $\mathcal{B}$, aunque para definir al sistema cociente hemos utilizado representantes de las clases de equivalencia, el nuevo sistema está bien definido: no depende de ellos.

Sea $\mathcal{I}$ la asignación que a cada variable la manda a su clase de equivalencia según $\sim$. Es decir, $\mathcal{I}(x) = [x]$. Demostraremos a continuación que la denotación de cualquier término es su clase de equivalencia y que $\mathcal{AI}$ es modelo de todas y solas las fórmulas de Γ^*.

4.5.5. *Proposición*

Para cada término $\tau \in \mathrm{TER(L)}$: $\mathcal{AI}(\tau) = [\tau]$.

Para cada fórmula $\varphi \in \mathrm{FOR(L)}$: $\mathcal{AI}$ sat φ syss $\varphi \in \Gamma^*$.
La demostración será por inducción

(T1)' $\mathcal{AI}(x) = \mathcal{I}(x) = [x]$

(T2)' $\mathcal{AI}(f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}) = \mathbf{f}_i(\mathcal{AI}(\tau_1), \ldots, \mathcal{AI}(\tau_{\mu(i)})) =$
$= \mathbf{f}_i([\tau_1], \ldots, [\tau_{\mu(i)}]) =$
$= [f_i\,\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}]$

(Por el supuesto inductivo y la definición de $\mathbf{f}_i$).

(F1)' $\mathcal{AI}$ sat $R_j\,\tau_1 \ldots \tau_{\delta(i)}$ syss $\langle\mathcal{AI}(\tau_1), \ldots, \mathcal{AI}(\tau_{\delta(j)})\rangle \in \mathbf{R}_j$
syss $\langle[\tau_1], \ldots, [\tau_{\delta(j)}]\rangle \in \mathbf{R}_j$
syss $R_j\,\tau_1, \ldots, \tau_{\delta(j)} \in \Gamma^*$

(Por (T2)' y la definición de $\mathbf{R}_j$).

En especial, $\mathcal{AI}$ sat $\tau_1 = \tau_2$ syss $\mathcal{AI}(\tau_1) = \mathcal{AI}(\tau_2)$
syss $[\tau_1] = [\tau_2]$
syss $\tau_1 = \tau_2 \in \Gamma^*$

(Por (T2)', ser $\sim$ de equivalencia y la propia definición de $\sim$).

(F2)' $\mathcal{AI}$ sat $\neg\varphi$ syss no $\mathcal{AI}$ sat φ

syss no $\varphi \in \Gamma^*$

syss $\neg\varphi \in \Gamma^*$

(Por el supuesto inductivo y ser Γ^* máximamente consistente).

(F3)' $\mathcal{AI}$ sat $\varphi \vee \psi$ syss $\mathcal{AI}$ sat φ o $\mathcal{AI}$ sat ψ

syss $\varphi \in \Gamma^*$ o $\psi \in \Gamma^*$

syss $\varphi \vee \psi \in \Gamma^*$

(Por el supuesto inductivo y ser Γ^* máximamente consistente).

(F4)' $\mathcal{AI}$ sat $\exists x\varphi$ syss hay un $[\tau] \in$ TER(L)/$\sim$ tal que $\mathcal{AI}_x^{[\tau]}$ sat φ

syss hay un $\tau \in$ TER(L) tal que $\mathcal{AI}_x^{\mathcal{AI}(\tau)}$ sat φ

syss hay un $\tau \in$ TER(L) tal que $\mathcal{AI}$ sat $\mathbf{S}_x^\tau\, \varphi$

syss hay un $\tau \in$ TER(L) tal que $\mathbf{S}_x^\tau\, \varphi \in \Gamma^*$

syss $\exists x\varphi \in \Gamma^*$.

(Por el supuesto inductivo, el teorema de sustitución, ser Γ^* máximamente consistente y ejemplificado y (T2)').

4.5.6. *Proposición:* $\mathcal{A}$ es numerable

Para construir el sistema $\mathcal{A}$ hemos utilizado el conjunto TER(L), de los términos del lenguaje. Dicho conjunto es infinito numerable por ser el conjunto de los functores de L a lo sumo numerable y el de las variables infinito-numerable. Sobre TER(L) hemos construido un conjunto cociente, TER(L)/$\sim$, que será a lo sumo infinito numerable. ■

4.6. Corolario

Si $\Gamma \subseteq$ FOR(L) es consistente y LBR(Γ) es finito, entonces Γ tiene un modelo numerable.

Demostración

Es inmediata a partir de los lemas 1 y 2 precedentes. ■

4.7. Lema

Si $\Gamma \subseteq \mathrm{FOR(L)}$ y $\bar{\Gamma} \subseteq \mathrm{SEN}(\mathrm{L} \cup \{c_1, c_2, \ldots\})$ es la clase formada por las fórmulas de Γ que resultan de sustituir las variables libres por constantes nuevas, y si $\bar{\Gamma}$ tiene un modelo numerable, también Γ lo tendrá.

Demostración

Os lo dejo como ejercicio. ■

4.8. Teorema de Henkin

Todo conjunto consistente de fórmulas de L tiene un modelo numerable.

Demostración

En III.4.6 demostramos que si $\Gamma \subseteq \mathrm{FOR(L)}$ es consistente y $\mathrm{LBR}(\Gamma)$ es finito, entonces Γ tiene un modelo numerable. Lo único que necesitamos para probar el teorema de Henkin es poder prescindir de la condición de que las variables libres de Γ constituyan un conjunto finito.

Sea $\Gamma \subseteq \mathrm{FOR(L)}$ consistente y sea $\mathrm{L}^* = \{c_1, c_2, \ldots\} \cup \mathrm{L}$; es decir, una expansión del lenguaje con una colección infinita de functores ceroarios. Consideremos que tanto las variables del lenguaje como las nuevas constantes están ordenadas.

Para cada $\varphi \in \Gamma$ sea n_φ el menor número natural n tal que $\mathrm{LBR}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dicho de otro modo: n_φ es el índice más alto de las variables libres de φ.

Sea $\bar{\varphi} = \mathrm{S}^{c_1 \ldots c_{n_\varphi}}_{x_1 \ldots x_{n_\varphi}}\, \varphi$. Es decir, la sustitución de las variables libres en φ por las constantes nuevas.

Sea $\bar{\Gamma} = \{\bar{\varphi} \,/\, \varphi \in \Gamma\}$.

Demostraré que $\bar{\Gamma}$ es consistente y que los modelos de $\bar{\Gamma}$ son esencialmente modelos de Γ. El motivo de hacerlo así es que si sé que $\bar{\Gamma}$ es consistente, también sabré (III.4.6) que $\bar{\Gamma}$ tiene un modelo ya que en $\bar{\Gamma}$ no hay variables libres. Si resulta además que ese modelo de $\bar{\Gamma}$ conduce a uno de Γ, el teorema de Henkin estará liquidado. Veamos que es éste el caso:

4.8.1. *Proposición:* $\bar{\Gamma}$ es consistente

Para demostrarlo veremos que cada subconjunto finito de $\bar{\Gamma}$ tiene un modelo ya que de ahí se sigue que $\bar{\Gamma}$ es consistente (Problema 6 de III).

Sea $\bar{\Gamma}_0 \subseteq \bar{\Gamma}$ un subconjunto finito. En Γ_0 no puede aparecer más que un número finito de variables libres, pues Γ_0 es finito. Evidentemente, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ es consistente por serlo Γ. (Ejercicio 4 de III.2.7). Por III.4.6, de ello se sigue que Γ_0 tiene un modelo numerable, $\mathcal{A}\mathcal{J}$.

Sea $\bar{\mathcal{A}} = \langle \mathcal{A}, \langle \mathcal{I}(x_n)\rangle_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}\rangle$; es decir, la expansión de $\mathcal{A}$ en donde se destacan los individuos $\mathcal{I}(x_1)$, $\mathcal{I}(x_2)$, ... que servirán de denotación a las nuevas constantes c_1, c_2, ...

Es evidente que $\bar{\mathcal{A}}\mathcal{I}(c_n) = \mathcal{I}(x_n) = \mathcal{A}\mathcal{I}(x_n)$ y que por lo tanto $\bar{\mathcal{A}}\mathcal{I}$ es modelo de $\bar{\Gamma}_0$ (II.4.2).

Hemos visto, pues, que cada subconjunto finito de $\bar{\Gamma}$ tiene un modelo y de ahí se sigue que cada uno de ellos será consistente (III.3.2). Por lo tanto $\bar{\Gamma}$ es consistente (Problema 3 de III). ■

4.8.2. *Proposición:* Si $\bar{\Gamma}$ es satisfacible, entonces Γ lo es también en una reducción del modelo de $\bar{\Gamma}$ (III.4.7).

Hemos, pues, demostrado que se puede eliminar la condición de que el número de variables libres sea finito del corolario III.4.6. ■

4.9. Teorema de Compacidad

Γ tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de Γ lo tiene.

Demostración

[$\Rightarrow$]. En este sentido la demostración es inmediata pues todo modelo de Γ lo será de cualquier subconjunto de Γ y en particular de los subconjuntos finitos.

[$\Leftarrow$]. En el otro sentido, supongamos que cada subconjunto finito de Γ tenga un modelo. Si Γ no lo tuviera, sería inconsistente por el teorema de Henkin (III.4.8). Pero, en tal situación, habría una fórmula φ tal que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. De aquí se sigue, por finitud de la deducibilidad (III.1.2), que para un cierto $\Delta \subseteq \Gamma$, finito, tendríamos: $\Delta \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. En este caso, Δ sería inconsistente. Y por lo tanto, por el teorema del test de consistencia (III.3.2), Δ no tendría ningún modelo. Pero hemos partido del supuesto de que cada subconjunto finito de Γ tenía un modelo. Por consiguiente, no puede ser cierto que Γ no tenga ningún modelo. ■

4.10. Teorema de Löwenheim-Skolem

Si Γ es un conjunto satisfacible de fórmulas escritas en un lenguaje numerable, entonces Γ tiene un modelo numerable.

Demostración

Sea Γ un conjunto satisfacible, $\Gamma \subseteq \mathrm{FOR(L)}$ y L numerable. Γ ha de ser consistente (III.3.2). Siendo Γ consistente tendra un modelo de universo numerable (III.4.8). ■

4.11. *Ejercicios*

1) Demostrad que todo conjunto consistente puede extenderse a uno máximamente consistente.

2) Demostrad que si Γ es consistente y LBR(Γ) es finito, entonces hay un Δ, $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq$ FOR(L) tal que Δ es ejemplificando y consistente.

3) Demostrad que la relación $\sim$ de III.4.5 es simétrica y transitiva.

4) Demostrad que si $\tau_k = t_k \in \Gamma^*$ $(1 \leq k \leq \mu(i))$, siendo Γ^* máximamente consistente y ejemplificado, entonces para cada k:

$$\Gamma^* \vdash f_i\tau_1 \dots \tau_{\mu(i)} = f_it_1 \dots t_k\tau_{k+1} \dots \tau_{\mu(i)}$$

5) Demostrad que si $\tau_k = t_k \in \Gamma^*$ $(1 \leq k \leq \delta(j))$, Γ^* máximamente consistente y ejemplificado, entonces

$\Gamma^* \vdash R_j\tau_1 \dots \tau_{\delta(j)} \leftrightarrow R_j\, t_1 \dots t_k\, \tau_{k+1} \dots \tau_{\delta(j)}$, para cada k.

6) Demuestra que si Γ no tiene un modelo ello equivale a que algún subconjunto finito suyo carezca de modelos.

Problema 7

Demostrad el lema III.4.7.

Problema 8

Demostrad esta versión del teorema de compacidad.
Si $\Gamma \models \varphi$ entonces hay un $\Delta \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Delta \models \varphi$.

Problema 9

En la demostración del Lema de Lindenbaum utilizamos una enumeración de las fórmulas del lenguaje que condiciona al conjunto Γ^*. ¿Qué propiedad de Γ nos llevaría a una única extensión Γ^* independiente del orden en que se listen las fórmulas del lenguaje?

5. COMPLETUD DEL CALCULO (L de cualquier cardinalidad k)

En el apartado anterior demostramos que el cálculo de primer orden es completo en el caso en el que el lenguaje empleado sea numerable. Pero ¿y cuándo tiene cualquier otra cardinalidad? En la introducción mencioné que nuestra prueba de completud, que es la de Henkin, se extiende fácilmente a lenguajes de cualquier cardinalidad con sólo realizar modificaciones de detalle. Dichas modificaciones afectan a la prueba del Lema de Lindenbaum pues, como recordareis, utilizábamos en ella una enumeración de las fórmulas y ahora el conjunto de fórmulas tiene una cardinalidad k. Vamos a aceptar el axioma de elección en la teoría de conjuntos que nos sirve de metateoría. De dicho axioma se sigue el del buen orden que afirma que todo conjunto puede ser bien ordenado. Con esta herramienta y usando inducción transfinita, en lugar de finita, se puede demostrar el análogo al lema III.4.4. También necesitamos un teorema nuevo, al que denomino Lema de reducción, que dice que de los modelos grandes salen modelos chiquitos (más o menos).

He organizado la demostración del Teorema de completud de conformidad con el esquema siguiente:

Teorema de Henkin: $\Gamma \subseteq FOR(L)$ consistente y L de cardinalidad $k \Rightarrow \Gamma$ tiene un modelo de cardinalidad $\geq k$.

↓

Teorema de Gödel: $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

↓

Corolario: $\models \varphi \Rightarrow \vdash \varphi$

Lema de Lindenbaum: $\Gamma \subseteq FOR(L)$ consistente $\Rightarrow$ hay un Γ^* máximamente consistente y ejemplificado tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ y $\Gamma^* \subseteq FOR(L^*)$ siendo $L \subseteq L^*$

Lema de Henkin: Γ^* máximamente consistente y ejemplificado y $\Gamma^* \subseteq FOR(L^*)$ con L^* cardinalidad $k \Rightarrow \Gamma^*$ tiene un modelo de cardinalidad $\leq k$.

Lema de reducción: Si Γ^* tiene un modelo, $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ y $\Gamma \subseteq FOR(L)$, $\Gamma^* \subseteq FOR(L^*)$, $L \subseteq L^*$, entonces Γ tiene un modelo que es una reducción del de Γ^*

→ *Teorema de Compacidad.*

→ Teorema de Löwenheim-Skolem: Si $\Gamma \subseteq FOR(L)$ es satisfacible y L tiene cardinalidad k, entonces Γ tiene un modelo de cardinalidad $\leq k$.

Comparad el organigrama anterior con el presentado en 4.1. Evidentemente cuando allí hablábamos de conjuntos de fórmulas o universos de modelos numerables ahora decimos de cardinalidad $\leq k$. Hay, sin embargo, otras diferencias: En el lema de Lindenbaum de 4.1 pedíamos que el conjunto de fórmulas tuviera sólo un número finito de fórmulas abiertas y el conjunto máximamente consistente y ejemplificado lo

creábamos en el lenguaje de partida mientras que ahora aceptamos cualquier conjunto consistente y creamos su extensión en un lenguaje extendido. Para demostrar el teorema de Henkin (4.8) y prescindir de la condición de que LBR(Γ) fuera finito tuvimos que utilizar, entre otros, el lema 4.7. Ahora el teorema de Henkin se seguirá directamente de los nuevos: a) Lema de Lindenbaum, b) Lema de Henkin y c) Lema de reducción. Puesto que el presente teorema de Henkin es un corolario inmediato de estos lemas, no necesitaremos probarlo.

Tampoco probaremos ni el teorema de Gödel, ni el de compacidad, ni el de Löwenheim-Skolem (que en la presente versión se siguen del teorema de Henkin igual que en la versión numerable se seguían del correspondiente teorema de Henkin).

Por lo que respecta al lema de Henkin no hay nada nuevo que probar excepto que la cardinalidad del modelo es $\leq k$, cosa natural ya que TER(L^*) será ahora de cardinalidad k.

En resumidas cuentas, lo único que hay que demostrar es el lema de Lindenbaum y el de reducción.

5.1. Lema de Lindenbaum

Si $\Gamma \subseteq$ FOR(L) es consistente, entonces hay un Γ^* máximamente consistente y ejemplificado tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^* \subseteq$ FOR(L^*) y $L \subseteq L^*$.

Demostración

Vamos a efectuar una extensión de Γ a un conjunto máximamente consistente y para ello empezaremos extendiendo el lenguaje L a un lenguaje $L^* = L \cup \{c_\alpha / \alpha < k\}$.

Por el teorema del buen orden sabemos que las fórmulas de L^* pueden ser bien ordenadas. Sea $\langle \varphi_\alpha \rangle_{\alpha<k}$ una buena ordenación de ellas.

De manera similar a como construimos Γ^* en III.4.4, construiremos ahora nuestro Γ^* a partir de una cadena $\langle \Gamma_\alpha \rangle_{\alpha<k}$ de conjuntos consistentes cuyas fórmulas pertenecen a FOR(L^*).

$\Gamma_0 = \Gamma$

$$\Gamma_{\alpha+1} = \begin{cases} \Gamma_\alpha, \text{ si } \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \text{ es contradictorio} \\ \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}, \text{ si dicho conjunto es consistente y } \varphi_\alpha \text{ no es} \\ \text{una particularización.} \\ \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha, \mathbf{S}_x^{c_\beta}\, \psi\}, \text{ si } \Gamma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\} \text{ es consistente, } \varphi_\alpha \equiv \exists x\psi \\ \text{y } c_\beta \text{ no está en } \Gamma \cup \{\varphi_\alpha\} \text{ y es la constante de mínimo} \\ \text{índice que cumple esta condición.} \end{cases}$$

$\Gamma_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$ para ordinales límite.

Definamos $\Gamma^* = \bigcup_{\alpha<k}\Gamma_\alpha$. Evidentemente, $\Gamma \subseteq \Gamma^*$. Además, por inducción transfinita sobre α, se demuestra que cada Γ_α es consistente.

5.1.1. *Proposición:* Para cada $\alpha < k$, Γ_α es consistente.

Sea $H = \{\alpha < k \,/\, \Gamma_\alpha$ es consistente$\}$.

Evidentemente $\Gamma_0 = \Gamma$ es consistente y $0 \in H$.

Ahora veremos que si Γ_β es consistente, también lo ha de ser $\Gamma_{\beta+1}$. Tanto si $\Gamma_{\beta+1} = \Gamma_\beta$ como si $\Gamma_{\beta+1} = \Gamma_\beta \cup \{\varphi_\beta\}$, $\Gamma_{\beta+1}$ es obviamente consistente.

Sea $\Gamma_{\beta+1} = \Gamma_\beta \cup \{\varphi_\beta, \mathbf{S}_x^{c_\gamma}\,\psi\}$ con $\varphi_\beta = \exists x\psi$ y siendo c_γ nueva.

Vamos a demostrar que $\Gamma_{\beta+1}$ es consistente demostrando que cada subconjunto finito suyo tiene un modelo (recordad el Problema 6 de III).

Sea $\Gamma_{0\beta+1} \subseteq \Gamma_{\beta+1}$ finito. Por ser un subconjunto de $\Gamma_{\beta+1}$, todos sus elementos estarán en Γ_β a excepción de $\mathbf{S}_x^{c_\gamma}\,\psi$ y tal vez de $\exists x\psi$. Aunque dichas fórmulas no tienen que estar necesariamente en $\Gamma_{0\beta+1}$, consideraremos que sí que lo están; es decir, $\Gamma_{0\beta+1} = \Gamma_{0\beta} \cup \{\exists x\psi, \mathbf{S}_x^{c_\gamma}\,\psi\}$.

Por ser $\Gamma_{0\beta} \cup \{\exists x\psi\}$ consistente y LBR $(\Gamma_{0\beta} \cup \{\exists x\psi\})$ finito, $\Gamma_{0\beta} \cup \{\exists x\psi\}$ tiene un modelo (III.4.6). Consideramos que las fórmulas están escritas en un lenguaje, $L_{0\beta}$, numerable cuyo conjunto de signos peculiares lo integran exclusivamente los que aparecen en las fórmulas.

Sea $\mathcal{A}\mathcal{I}$ un modelo tal. Es decir, es modelo de cada una de las fórmulas de $\Gamma_{0\beta} \cup \{\exists x\psi\}$. Sea $\mathbf{x} \in A$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{I}_x^{\mathbf{x}}$ sat ψ. Y tomemos la expansión de $\mathcal{A}$ que destaca a $\mathbf{x}$; es decir, $\langle\mathcal{A}, \mathbf{x}\rangle$. El sistema $\langle\mathcal{A}, \mathbf{x}\rangle$ es adecuado al lenguaje $L_{0\beta+1} = L_{0\beta} \cup \{c_\gamma\}$ y evidentemente $\langle\mathcal{A}, \mathbf{x}\rangle\mathcal{I}$ sat $\mathbf{S}_x^{c_\gamma}\,\psi$ (por el teorema de sustitución). Por consiguiente, $\Gamma_{0\beta+1}$ tiene un modelo.

Además, cuando todos los $\alpha < \lambda$ están en H, también λ lo estará. Quiero decir que si los Γ_α son consistentes, $\Gamma_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda}\Gamma_\alpha$ también lo será. El motivo es que si Γ_λ fuera inconsistente, un subconjunto finito suyo lo sería y por tanto algún Γ_α (Problema 3 de III).

El resto de la prueba, como en III.4.4. Como veis no sólo sigo la pauta de la demostración en versión numerable, sino que también he utilizado ciertos resultados obtenidos allí. ■

5.2. Lema de la reducción

Si $\Gamma^* \subseteq \mathrm{FOR}(L^*)$ tiene un modelo, $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, $\Gamma \subseteq \mathrm{FOR}(L)$ y $L \subseteq L^*$, entonces Γ tiene un modelo adecuado a L que es una reducción del de Γ^*.

Demostración

Lo habeis demostrado ya, es el Problema 7 de II. ■

5.3. *Ejercicios*

1) ¿Por qué la versión 4.4 del lema de Lindenbaum no es adecuada para lenguajes no numerables?

2) En la demostración 5.1 del lema de Lindenbaum hemos utilizado la versión numerable del teorema de Henkin. Formulad un lema que nos permitiera demostrar que $\Gamma_{\beta+1}$ es consistente si Γ_β lo es, sin usarlo.

3) Sea $\varphi \in \mathrm{FOR}(L)$ una fórmula sin cuantificadores y supongamos que en φ hay n términos. Demostrad que si φ es satisfacible entonces tiene un modelo cuyo universo tiene un número de elementos que no excede de n.

4) Formulad y demostrad el Teorema de Compacidad.

Problema 10

Demostrad que todo conjunto consistente $\Gamma \subseteq \mathrm{FOR}(L)$ puede extenderse a uno máximamente consistente utilizando el lema de Zorn.

NOTA

El lema de Zorn es una consecuencia del de elección y para formularlo necesitamos el concepto de cadena.

Definición de cadena

Sea M un conjunto y $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P} M$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una cadena en $\mathcal{B}$ si $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ y para cada $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ se cumple: $c_1 \subseteq c_2$ o $c_2 \subseteq c_1$; es decir $\mathcal{C}$ está completamente ordenado por inclusión.

Lema de Zorn

Si para cada cadena $\mathcal{C}$ en $\mathcal{B}$ se cumple que $\bigcup_{c \in \mathcal{C}} c \in \mathcal{B}$ entonces hay en $\mathcal{B}$ un elemento maximal; es decir, un c_0 que cumple que no hay $c_1 \in \mathcal{B}$ tal que $c_0 \subseteq c_1$ pero $c_0 \neq c_1$.

6. CONCLUSION

Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq$ FOR(L) siendo L de cualquier cardinalidad infinita:

$$\Gamma \models \varphi \text{ syss } \Gamma \vdash \varphi$$

— Se sigue del teorema de completud y del de corrección—. ■

Por consiguiente, en primer orden el conjunto de los teoremas lógicos (fórmulas deducidas sin premisas en el cálculo) y el de las lógicamente válidas (consecuencias del conjunto vacío de fórmulas) coinciden. Y no sólo eso, acabamos de demostrar que las consecuencias de un conjunto de fórmulas son los teoremas deducibles a partir del conjunto.

Capítulo IV
NOCIONES BASICAS: TEORIA DE MODELOS

INTRODUCCION

En el primer capítulo estudiamos los sistemas y ciertas relaciones entre ellos, como isomorfía e inmersión, sin utilizar el lenguaje formal. En el segundo capítulo introdujimos el lenguaje formal de primer orden, que nos sirve para hablar en él acerca de los sistemas, y definimos las nociones semánticas fundamentales. Utilizando dichas nociones podemos afirmar, en algunos casos, que una determinada fórmula es lógicamente válida: que es verdadera en todas las interpretaciones posibles de los signos que aparecen en ella. En el tercer capítulo demostramos que la noción de consecuencia se corresponde exactamente con la de deducibilidad. Todos estos conceptos y teoremas, aún siendo muy importantes para la Teoría de Modelos, no son, sin embargo, sus tópicos fundamentales, que se sitúan precisamente en la bisagra entre álgebra y lógica.

En este capítulo vamos a relacionar a los sistemas en función de lo que de ellos podamos decir en el lenguaje de primer orden (que no lo es todo). Concretamente, estudiaremos las relaciones entre sistemas de: equivalencia elemental, subsistema elemental e inmersión elemental.

Para relacionar a los sistemas hay fundamentalmente dos formas: a) Al margen del lenguaje formal de primer orden y b) A través de él. Como idea general vale la siguiente: las relaciones entre sistemas a veces no pueden ser captadas en toda su profundidad por el lenguaje de primer orden. Por ejemplo, mientras que si dos sistemas son isomorfos, también son elementalmente equivalentes, no vale el recíproco. Es decir, hay sistemas indistinguibles en el lenguaje de primer orden que no son iguales, ni tan siquiera isomorfos.

Todas las relaciones entre sistemas que consideramos en este libro y que utilizan como vehículo el lenguaje formal, son menos fuertes que la isomorfía. La única excepción es la de subsistema elemental, que ni implica ni es implicada por isomorfía.

Los apartados 4 y 5 de este capítulo los dedico a la definición de los conceptos fundamentales de: Teoría, Teoría de un sistema y Modelos de un conjunto de sentencias.

Para nosotros una teoría es un conjunto de sentencias cerrado por la relación de deducibilidad. Ciertas teorías se caracterizan por poseer la propiedad de ser completas; esto significa que para cada sentencia φ del lenguaje, o ella o su negación está en la teoría. Esta propiedad es muy interesante pues los modelos de una teoría completa son elementalmente equivalentes.

Con frecuencia estamos interesamos en una teoría que se nos presenta como el conjunto de las sentencias verdaderas en un sistema, o clase de sistemas. En estos casos el problema fundamental no es el de la completud, pues obviamente la teoría de un sistema es siempre completa, sino el de la axiomatizabilidad; es decir, el determinar si tiene la propiedad de ser expresada mediante un conjunto recursivo de axiomas. Estos problemas los estudiaremos en el capítulo V.

En el apartado 6 de este capítulo introducimos los diagramas. El método de los diagramas os resultará familiar pues se asemeja al procedimiento que Henkin utilizó en su prueba de completud. Consideraremos extensiones alfabéticas de los lenguajes y sus sistemas asociados y muy en especial nos fijaremos en el conjunto de las sentencias atómicas y las negaciones de sentencias atómicas que valen en el sistema ampliado. A este conjunto de sentencias lo denominaremos diagrama. La gracia de los diagramas es que proporcionan una información muy grande acerca de su sistema —son como las tablas multiplicativas de un grupo— y que nos permiten construir modelos.

1. EQUIVALENCIA ELEMENTAL

La relación entre sistemas de equivalencia elemental utiliza el lenguaje de primer orden como vehículo de la relación. Concretamente, se establece dicha relación entre aquellos sistemas similares que son indistinguibles desde el lenguaje de primer orden: Simultáneamente satisfacen las mismas sentencias.

Como recordareis, en II demostramos el Teorema de isomorfía que dice que cuando dos sistemas son isomorfos, el que una fórmula sea satisfecha en el primero de los sistemas, para ciertos elementos de su universo, equivale a que la misma fórmula sea satisfecha en el segundo de los sistemas para aquellos elementos de su universo que son la imagen mediante el isomorfismo de los elementos que funcionaban en el sistema primero. A partir de este teorema se sigue, como un corolario sencillo, que isomorfía implica equivalencia elemental. Esto es natural, hemos comentado que la isomorfía es la semejanza total de estructura, no es de extrañar que no se puedan diferenciar los sistemas isomorfos en primer orden. De hecho, algo más es cierto: tampoco se diferencian en el lenguaje de segundo orden. Los sistemas isomorfos son secundariamente equivalentes.

En otro capítulo, como aplicación del Teorema de Compacidad, construiré un modelo no estándar de los naturales; es decir, un sistema no isomorfo a $\mathcal{N}$ en el que, no obstante valen las mismas sentencias. Con ello habremos despejado la siguiente duda ¿son isomorfos todos los sistemas elementalmente equivalentes?

Veremos, sin embargo, para sistemas muy sencillos —de tipo $\langle \varnothing; 1\rangle$— que la

equivalencia implica el isomorfismo cuando alguno de los sistemas tiene universo finito. De hecho, aunque no lo demuestre en este capítulo, ello es cierto para sistemas finitos de cualquier tipo.

El concepto de equivalencia elemental es central en Teoría de Modelos. Su utilidad podrá calibrarse cuando hablemos de teorías, que no son otra cosa que conjuntos de sentencias cerradas por deducibilidad, y en especial, de lo que llamaremos teorías completas. Dichas teorías se caracterizan por caracterizar la clase de sus modelos hasta equivalencia elemental. Ejemplos de teorías completas:

* Los órdenes densos sin extremos,
* Los cuerpos algebraicamente cerrados,
* Las álgebras de Boole sin átomos.

1.1. Definición

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos sistemas similares y sea L un lenguaje apropiado para hablar de ambos.

Decimos que $\mathcal{A}$ es elementalmente equivalente a $\mathcal{B}$ syss para cada sentencia φ de L: si $\mathcal{A}$ es modelo de φ, entonces $\mathcal{B}$ es modelo de φ. Escribimos $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ para indicar que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son elementalmente equivalentes. □

1.2. Proposición

Si $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, entonces para cada sentencia φ de L se cumple: $\mathcal{A}$ es modelo φ syss $\mathcal{B}$ es modelo de φ.

Demostración

Sea $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Por la definición de equivalencia elemental se cumple la primera mitad de la proposición. Para ver que se cumple también en el otro sentido, sea φ una sentencia de L y supongamos que $\mathcal{B}$ sea modelo de φ pero que $\mathcal{A}$ no lo sea. $\mathcal{A}$ será modelo de $\neg\varphi$. Por tanto, dado que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ es modelo de $\neg\varphi$. Esto es imposible, un sistema no puede ser modelo simultáneamente de una sentencia y su negación. ■

Ejemplos

1) Los sistemas $\langle\{0,1,2\}\rangle$ y $\langle\{3,4,5\}\rangle$ son elementalmente equivalentes. En general, dos sistemas de tipo $\langle\emptyset;\emptyset\rangle$ con el mismo número finito de elementos en su universo son elementalmente equivalentes.

2) Los sistemas $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \subseteq\rangle$ y $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B}, /\rangle$ donde $\mathbf{A} = \mathcal{P}\{0,1,2\}$ y $\mathbf{B} = \{1,2,3,6,10,15,900\}$ del ejemplo 1 de I.3.5 son elementalmente equivalentes.

3) Los sistemas $\langle \mathbb{N}, 0, S\rangle$ y $\langle 2\mathbb{N}, 0, S'\rangle$, donde $2\mathbb{N}$ son los naturales pares y S' es la operación de sumar 2, del ejemplo 2 de I.3.5 son elementalmente equivalentes.

4) Los sistemas $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}}\rangle$ y $\langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}\rangle$ de los racionales y reales con sus órdenes respectivos, son otro ejemplo.

5) Los sistemas $\langle \mathbb{N}, 0, S\rangle$ y $\langle \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^*, 0, S^*\rangle$ donde $\mathbb{Z}^*$ es una copia de $\mathbb{Z}$ disjunta con $\mathbb{N}$ y la función S^* está ampliada para proporcionar siguientes en las mismas condiciones que las de S a cada elemento de $\mathbb{Z}^*$, es también un ejemplo de sistemas elementalmente equivalentes.

Los tres primeros ejemplos lo son de sistemas que no sólo son elementalmente equivalentes, sino también isomorfos. Demostraré a continuación que la isomorfía implica la equivalencia elemental. Por consiguiente, dos sistemas isomorfos cualesquiera son un ejemplo de equivalencia elemental.

En el ejemplo 4 vemos un caso de equivalencia sin isomorfía. Más adelante demostraré de nuevo su equivalencia utilizando el hecho de que ambos sistemas son órdenes densos sin extremos.

También, en el ejemplo 5 se trata de sistemas elementalmente equivalentes que, no obstante, no son isomorfos.

1.3. Proposición

Si $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Es un corolario sencillo de II.5.2. ■

1.4. Proposición

La relación $\equiv$ (equivalencia elemental) es una relación de equivalencia entre sistemas del mismo tipo.

Puesto que $\cong$ y $\equiv$ son ambas relaciones de equivalencia, podemos hablar de las clases de equivalencia generadas por ambas. La proposición 1.3 la podemos expresar diciendo que para cada sistema $\mathcal{A}$, su clase de equivalencia mediante $\cong$ está contenida en la de $\mathcal{A}$ mediante $\equiv$, es decir, $\{\mathcal{B}/\mathcal{A} \cong \mathcal{B}\} \subseteq \{\mathcal{B}/\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}\}$.

Esta inclusión se convierte en igualdad cuando $\mathcal{A}$ es finito y es inclusión estricta cuando $\mathcal{A}$ es infinito.

1.5. *Ejercicios*

1) Demostrad la proposición 1.4.

2) Demostrad que $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}\rangle$ no es elementalmente equivalente a $\langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}\rangle$.

3) Demostrad que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ siendo $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}\rangle$ y $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N} - \{0\}, <_{\mathbb{N}-\{0\}}\rangle$.

Problema 1

Sea $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Demostrad que si **A** es finito, entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Utilizad un sistema $\mathcal{A}$ de tipo $\langle \varnothing; 1 \rangle$. Es decir, probadlo sólo para sistemas relacionales con una sola relación monaria destacada en el sistema.

Problema 2

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ modelos de la Teoría de los órdenes densos sin extremos tales que $\mathcal{A}$ está inmerso en $\mathcal{B}$. Demostrad que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Sabed que toda sentencia de dicha teoría es lógicamente equivalente a una sin cuantificadores.

2. SUBSISTEMA ELEMENTAL

Entre sistemas similares se establece, en ocasiones, la relación siguiente: Uno de ellos es un subsistema del otro y, además las mismas fórmulas son satisfechas en ambos tomando la misma asignación en los dos sistemas. En tal caso decimos que el primero de los sistemas es un subsistema elemental del segundo.

Puesto que para que dos sistemas sean elementalmente equivalentes lo que pedimos es que en los dos sean verdaderas las mismas sentencias, es evidente que la relación de ser subsistema elemental implica la de equivalencia elemental. Demostraremos, no obstante, que no coincide con ella. El problema no es simplemente el que pueda fallar el que uno sea subsistema del otro —normalmente el que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ no quiere decir que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$—, salvado este obstáculo, la cuestión estriba en que tienen que ser verdaderas las mismas fórmulas y para los mismos elementos del sistema.

En el ejercicio 3) de IV.1.5 se pedía demostrar la equivalencia elemental de $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N} - \{0\}, <_{\mathbb{N}-\{0\}} \rangle$ y $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$. Se puede demostrar, además, que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ y que $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$. Sin embargo, $\mathcal{B}$ no es un subsistema elemental de $\mathcal{A}$. Piénsese en la fórmula $\varphi = \forall y\ (x \neq y \rightarrow Rxy)$. Está claro que $\mathcal{B}[1]$ sat φ pero $\mathcal{A}[1]$ no sat φ —aunque, naturalmente, $\mathcal{A}[0]$ sat φ—.

2.1. Definición

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos sistemas similares y L su lenguaje apropiado. Decimos que $\mathcal{A}$ es un subsistema elemental de $\mathcal{B}$ syss:

1) $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$.

2) Para cada asignación $\mathcal{I}: \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{A}$ y cada fórmula φ de L se cumple: $\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat φ syss $\mathcal{B}\mathcal{I}$ sat φ.

Escribimos $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ para indicar que $\mathcal{A}$ es un subsistema elemental de $\mathcal{B}$. □

2.2. Corolario

Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ sistemas similares. $\mathscr{A} < \mathscr{B}$ syss $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ y para cada $\varphi\ \langle x_1 \ldots x_n \rangle$ de L se cumple:

$$\mathscr{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathscr{B}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi, \text{ para cada } \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}. \ \blacksquare$$

2.3. Proposición

La relación $<$ es un orden parcial entre sistemas del mismo tipo.

Demostración

En I.3.1.1 demostré que la relación $\subseteq$ es de orden parcial entre sistemas del mismo tipo. Apoyándose en este resultado, es fácil ver que $<$ también lo es, ya que:

1.º) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}$ y la condición 2.) de la definición se cumple obviamente. 2.º) Si $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ y $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$, entonces $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ y 3.º) Si $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ y $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{C}$, entonces $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C}$ y la condición 2) también se cumple. $\blacksquare$

Ejemplos

1) $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle < \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$. La demostración la haré en este mismo apartado.

2) $\mathscr{N} < \mathscr{M}$ donde $\mathscr{N}$ es el sistema de los naturales estándar y $\mathscr{M}$ es el sistema que construiremos en V.3.7 para demostrar que la aritmética de Peano de primer orden no es categórica.

Otros ejemplos de sistemas $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ tales que $\mathscr{A} < \mathscr{B}$ aparecerán cuando introduzcamos la noción de modelo-completud. Siempre que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ sean modelo de una teoría modelo-completa y que $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ se cumplirá que $\mathscr{A} < \mathscr{B}$.

Este es justamente el caso del ejemplo 1), pues ambos sistemas son modelo de una teoría modelo-completa: la de los órdenes lineales densos.

A continuación demuestro un criterio de bastante utilidad a la hora de mostrar que un cierto sistema $\mathscr{A}$ es un subsistema elemental de $\mathscr{B}$.

2.4. Teorema (Criterio de subsumibilidad elemental)

Si $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$: $\mathscr{A} < \mathscr{B}$ syss para cada fórmula φ de L y cada asignación $\mathscr{I}$: $\mathscr{V} \to \mathbf{A}$ se tiene que si $\mathscr{B}\mathscr{I}$ sat $\exists x\varphi$ entonces hay un $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathscr{B}\mathscr{I}^{\mathbf{x}}_{x}$ sat φ. .

Demostración

[$\Rightarrow$] Sea $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ y sea φ una fórmula cualquiera de L y $\mathcal{I}$ una asignación en **A**. Si $\mathcal{B}\mathcal{I}$ sat $\exists x\varphi$, entonces $\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat $\exists x\varphi$ (pues $\mathcal{A} < \mathcal{B}$). Por tanto, hay un $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x}$ sat φ. Luego, $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x}$ sat φ.

[$\Leftarrow$] Sea $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ y supongamos que para cada fórmula φ de L y cada asignación $\mathcal{I}: \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{A}$ se cumple: si $\mathcal{B}\mathcal{I}$ sat $\exists x\varphi$, entonces hay un $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x}$ sat φ.

Queremos demostrar que $\mathcal{A} < \mathcal{B}$, por lo que necesitamos demostrar que para cada fórmula φ de L y $\mathcal{I}: \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{A}$ se cumple: $\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat φ syss $\mathcal{B}\mathcal{I}$ sat φ.

Lo haremos por inducción, demostrando primero que $\mathcal{A}\mathcal{I}(\tau) = \mathcal{B}\mathcal{I}(\tau)$ para cada término.

(T1) $\mathcal{A}\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}(x) = \mathcal{B}\mathcal{I}(x)$.

(T2) Supuesto que vale para $\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}$, demostrarlo para $f_i\, \tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathcal{I}(f_i\tau_1 \ldots \tau_{\mu(i)}) &= \mathbf{f}_i(\mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_1), \ldots, \mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_{\mu(i)}))\\
&= \mathbf{g}_i(\mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_1), \ldots, \mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_{\mu(i)})) \text{ (pues } \mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B})\\
&= \mathbf{g}_i(\mathcal{B}\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{B}\mathcal{I}(\tau_{\mu(i)})) \text{ (por supuesto inductivo)}\\
&= \mathcal{B}\mathcal{I}(f_i\tau_1, \ldots, \tau_{\mu(i)}).
\end{aligned}$$

(F1) Sea $\varphi = R_j\, \tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)}$

$\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat $R_j\, \tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)}$ syss $\langle \mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_1), \ldots, \mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_{\delta(j)})\rangle \in \mathbf{R}_j$

syss $\langle \mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_1), \ldots, \mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_{\delta(j)})\rangle \in \mathbf{S}_j \cap \mathbf{A}^{\delta(j)}$ (pues $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$)

syss $\langle \mathcal{B}\mathcal{I}(\tau_1), \ldots, \mathcal{B}\mathcal{I}(\tau_{\delta(j)})\rangle \in \mathbf{S}_j$ (pues vale para términos y los de $\mathcal{A}\mathcal{I}(\tau_i)$ son elementos de **A**)

syss $\mathcal{B}\mathcal{I}$ sat $R_j\, \tau_1 \ldots \tau_{\delta(j)}$.

En especial, vale para $\tau_1 = \tau_2$.

(F2) y (F2) son muy sencillos de demostrar: simplemente aplicar el supuesto inductivo.

(F4) Demostrarlo para $\exists x\psi$, supuesto que vale para ψ

Si $\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat $\exists x\psi$ entonces hay $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x}$ sat ψ

entonces hay $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x}$ sat ψ

(pues, por hipótesis de inducción, vale para ψ)

entonces hay $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ tal que $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x}$ sat ψ (pues $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$)

entonces $\mathcal{B}\mathcal{I}$ sat $\exists x\psi$

Si $\mathcal{B}\mathcal{I}$ sat $\exists x\psi$ entonces hay un $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x}$ sat ψ, por la hipótesis del lema

entonces hay un $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x}$ sat ψ, por hipótesis de inducción

entonces $\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat $\exists x\psi$

De forma similar se demuestra para $\forall x\psi$. ■

2.5. Corolario

Si $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$, entonces: $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ syss para cada $\varphi\langle x_1 \dots x_n\rangle \in \mathrm{FOR(L)}$ y cada $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$

si hay un $\mathbf{z} \in \mathbf{B}$ tal que $\mathcal{B}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{z}]$ sat φ

entonces hay un $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{B}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1}\ \mathbf{y}]$ sat φ.

Demostración

[$\Rightarrow$] Sea $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ y supongamos que $\varphi\langle x_1 \dots x_n\rangle$ es una fórmula de L y que $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1} \in \mathbf{A}$ y que hay también un $\mathbf{z} \in \mathbf{B}$ tal que $\mathcal{B}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{z}]$ sat φ.

Si $\mathcal{B}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{z}]$ sat φ entonces $\mathcal{B}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}]$ sat $\exists x_n\varphi$

entonces $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1}}_{x_1 \dots x_{n-1}}$ sat $\exists x_n\varphi$ para cualquier $\mathcal{I}: \mathcal{V} \to \mathbf{B}$
(y, en especial, para cualquier $\mathcal{I}: \mathcal{V} \to \mathbf{A}$)
entonces hay un $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{y}}_{x_1 \dots x_{n-1}x_n}$ sat φ (por IV.2.4)
entonces hay un $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{B}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{y}]$ sat φ
(por el teorema de coincidencia)

[$\Leftarrow$] Supongamos que $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ y que para cada $\varphi\langle x_1 \dots x_n\rangle \in \mathrm{FOR(L)}$ y cada $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1} \in \mathbf{A}$ se cumple que si hay un $\mathbf{z} \in \mathbf{B}$ tal que $\mathcal{B}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{z}]$ sat φ, entonces hay un $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{B}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{y}]$ sat φ. Queremos demostrar que $\mathcal{A} < \mathcal{B}$. Vamos a utilizar el teorema 2.4 por lo que sólo necesitamos probar que para $\mathcal{I}: \mathcal{V} \to \mathbf{A}$, si $\mathcal{B}\mathcal{I}$ sat $\exists x\varphi$ entonces hay un $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{y}}_{x}$ sat φ.

Sea $\mathcal{I}: \mathcal{V} \to \mathbf{A}$, $\mathrm{LBR}(\exists x\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ y $\mathcal{B}\mathcal{I}$ sat $\exists x\varphi$. Por tanto, $\mathcal{B}[\mathcal{I}(x_1) \dots \mathcal{I}(x_{n-1})]$ sat $\exists x\varphi$. De aquí se sigue que hay un $\mathbf{z} \in \mathbf{B}$ tal que $\mathcal{B}[\mathcal{I}(x_1) \dots \mathcal{I}(x_{n-1})\mathbf{z}]$ sat φ. Conforme a la hipótesis, hay un $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{B}[\mathcal{I}(x_1) \dots \mathcal{I}(x_{n-1})\mathbf{y}]$ sat φ. Esto es lo mismo que decir que hay un $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{y}}_{x}$ sat φ, que es lo que queríamos demostrar. Conclusión: $\mathcal{A} < \mathcal{B}$. ■

La relación de equivalencia elemental se define utilizando sentencias y la de ser un subsistema elemental con fórmulas. Por consiguiente, es más sencillo manejar la

segunda que la primera (por inducción sobre la formación de fórmulas). El teorema 2.4 y su corolario 2.5 nos proporcionan criterios bastante útiles para manejar la relación $<$. El lema 2.4 nos dice que, trabajando con un sistema $\mathcal{A}$ que sea subsistema de $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ equivale a exigir que siempre que en el sistema $\mathcal{B}$ valga una fórmula particularizada en una interpretación cuya asignación esté definida sobre **A**, también habrá en **A** un elemento que haga que el núcleo de la fórmula siga valiendo en $\mathcal{B}$ para elementos de **A**. Es decir, —y éste es el corolario 2.5— siempre que en **B** haya un elemento que haga que una cierta fórmula sea verdad en $\mathcal{B}$, habrá en **A** otro elemento que valida la misma fórmula en $\mathcal{B}$.

Esto es exactamente lo que sucede con el orden de los racionales y el de los reales: entre dos números racionales cualesquiera no solamente hay un número real, también hay un numero racional. O también, por encima de un número real dado no solamente hay números reales, también los hay racionales.

2.6. Teorema $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle < \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$

Que $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$ es obvio. Para ver que es un subsistema elemental podemos utilizar el corolario IV.2.5 por lo que nos bastará con demostrar que para cada fórmula $\varphi\langle x_1 \ldots x_{n+1}\rangle$ de $L(\mathcal{R}_<)$ y cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{Q}$:

$$\text{si hay un } \mathbf{z} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathcal{R}_<[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n, \mathbf{z}] \text{ sat } \varphi,$$

entonces hay un $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}$ tal que $\mathcal{R}_<[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n, \mathbf{y}]$ sat φ.

Sea, pues, $\varphi\langle x_1 \ldots x_{n+1}\rangle \in FOR(L(\mathcal{R}_<))$ y sea $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{Q}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{R}_<[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \mathbf{z}]$ sat φ.

Los racionales $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ forman un conjunto linealmente ordenado, por lo que podemos considerar, sin pérdida de generalidad que $\mathbf{x}_1 < \mathbf{x}_2 < \ldots < \mathbf{x}_n$. Hay tres posibilidades:

1.º) $\mathbf{z} \in \mathbb{Q}$ (no hay nada que demostrar en ese caso).

2.º) O bien $\mathbf{z} < \mathbf{x}_1$, o bien $\mathbf{x}_n < \mathbf{z}$.

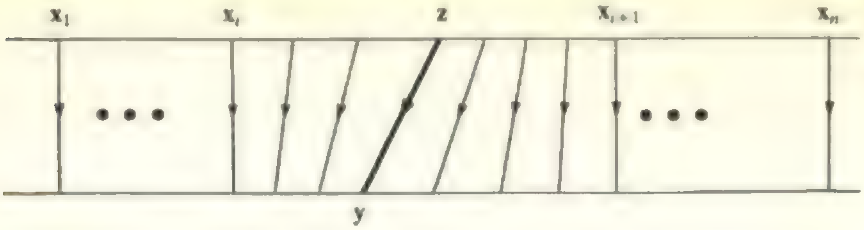
3.º) $\mathbf{x}_i < \mathbf{z} < \mathbf{x}_{i+1}$ para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

En cada uno de los casos 2.º y 3.º se puede definir un isomorfismo **h** de $\mathcal{R}_<$ en $\mathcal{R}_<$ tal que $\mathbf{h}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $\mathbf{h}(\mathbf{z}) \in \mathbb{Q}$. Con esto habremos demostrado el teorema, pues sabemos por el corolario II.5.2 que

$$\mathcal{R}_<[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \mathbf{z}] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathcal{R}_<[\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{h}(\mathbf{x}_n)\mathbf{h}(\mathbf{z})] \text{ sat } \varphi$$

y por hipótesis, $\mathcal{R}_<[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \mathbf{z}]$ sat φ.

Vamos a analizar con detalle el tercer caso, definiendo el isomorfismo adecuado



$x_1, \ldots, x_n$ son racionales y z es real con $x_i < z < x_{i+1}$.

Sea y un racional entre x_i y x_{i+1}; es decir $x_i < y < x_{i+1}$ $\left(\text{por ejemplo, } y = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$.

Definamos h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ así:

$$h(x) = x \text{ si } x \leq x_i \text{ o } x_{i+1} \leq x$$

$$h(x) = \left(\frac{y - x_i}{z - x_i} \cdot (x - x_i)\right) + x_i \text{ (para } x_i \leq x \leq z)$$

$$h(x) = \left(\frac{x_{i+1} - y}{x_{i+1} - z} \cdot (x - z)\right) + y \text{ (para } z \leq x \leq x_{i+1})$$

Observar que los valores para $x = x_i$ y para $x = x_{i+1}$, están dados de dos formas diferentes y que ambas coinciden.

No es difícil demostrar que la función h así definida es un isomorfismo de $\mathfrak{R}_<$ en $\mathfrak{R}_<$, con lo que el teorema queda probado. ■

La demostración del teorema anterior he querido hacerla así para que nos sirviera de práctica de utilización del criterio de subsumibilidad elemental. Sin embargo, sabiendo, como sabemos (lo demostraré en VII.2.5, consultadlo ahora si queréis) que la teoría de los órdenes densos sin extremos admite eliminación de cuantificadores, es casi un pecado el haberla hecho así. ¿Sabeis por qué lo digo? Pensadlo, es el ejercicio 3) siguiente.

Una vez que se sabe que un sistema es un subsistema elemental de otro, es obvio que son elementalmente equivalentes. Este es el contenido del ejercicio 3) que enuncio a continuación.

Aplicado a nuestro caso, el del orden de los racionales y el de los reales, quiere decir que el lenguaje de primer orden es incapaz de distinguir entre estos sistemas: las diferencias evidentes entre estos sistemas no son expresables en primer orden.

Otra manera de demostrar que el orden de los racionales y el de los reales son sistemas elementalmente equivalentes es probando que la teoría de los órdenes densos sin extremos es completa; es justamente lo que haremos en el capítulo VII.

2.7. Test de Tarski-Vaught de subsumibilidad elemental

Las dos condiciones siguientes, tomadas conjuntamente son suficientes para que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

i) $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$.

ii) Para cada subconjunto finito de **A**, $\mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}$, y cada elemento $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$, hay un automorfismo **h** de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}$ tal que $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}'$ y $\mathbf{h}(\mathbf{b}) \in \mathbf{A}$.

Demostración

Supongamos que las condiciones i) y ii) de este teorema se cumplen. Veremos que para cada fórmula $\varphi \in \mathrm{FOR(L)}$ y cada asignación $\mathcal{I}: \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{A}$: si $\mathcal{B}\mathcal{I}$ sat $\exists x\varphi$, entonces hay un $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{x}}_{x}$ sat φ. Una vez demostrado esto, por el criterio de subsumibilidad elemental (IV.2.4), se sigue que $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Sea $\varphi \in \mathrm{FOR(L)}$, $\mathcal{I}: \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{A}$ y supongamos que $\mathcal{B}\mathcal{I}$ sat $\exists x\varphi$. Por lo tanto, hay un $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$ tal que $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{b}}_{x}$ sat φ. Sea $\mathbf{A}' = \{\mathcal{I}(y)/y \in \mathrm{LBR}(\varphi)\}$.

Evidentemente $\mathbf{A}'$ es finito. Por la condición ii) tiene que haber un automorfismo $\mathbf{h}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{A}'$ y $\mathbf{h}(\mathbf{b}) \in \mathbf{A}$.

Por el Teorema de isomorfía (II.5.2) $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{b}}_{x}$ sat φ syss $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{h(b)}}_{x}$ sat φ.

Por lo tanto, $\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{h(b)}}_{x}$ sat φ y $\mathbf{h}(\mathbf{b}) \in \mathbf{A}$. ■

2.8. *Ejercicios*

1) Demostrad la proposición 2.1.

2) Demostrad que si $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

3) Demostrad que $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle \prec \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$ utilizando el teorema VII.2.5.

4) Demostrad que $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ no es un subsistema elemental de $\langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$.

5) Completad la prueba del teorema 2.6.

Problema 3

Dado un sistema finito, $\mathcal{B}$ ¿puede tener un subsistema elemental distinto del propio $\mathcal{B}$?

Problema 4

Demostrad que si $\mathcal{A}$ es un subsistema de $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$) y ambos sistemas son subsistemas elementales de un mismo sistema $\mathcal{C}$ ($\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ y $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$), entonces $\mathcal{A}$ es un subsistema elemental de $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$).

3. INMERSION ELEMENTAL

Como se recordará —es la proposición I.3.5.4— $\mathcal{A}$ está inmerso en $\mathcal{B}$ equivale a que exista un cierto sistema $\mathcal{C}$ que sea isomorfo a $\mathcal{A}$ y subsistema de $\mathcal{B}$ —$\mathcal{A} \stackrel{\sim}{\Box} \mathcal{B} \Leftrightarrow \exists \mathcal{C}: \mathcal{A} \cong \mathcal{C} \Box \mathcal{B}$—. Es decir, $\mathcal{B}$ contiene como subsistema una copia de $\mathcal{A}$.

La inmersión elemental se asemeja. Entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se da la relación de inmersión elemental, $\mathcal{A} \stackrel{\sim}{\prec} \mathcal{B}$, cuando hay un sistema $\mathcal{C}$ que es isomorfo a $\mathcal{A}$ y subsistema elemental de $\mathcal{B}$. En este caso, $\mathcal{B}$ contiene como subsistema elemental una copia de $\mathcal{A}$. Está claro que si $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, también $\mathcal{A} \stackrel{\sim}{\prec} \mathcal{B}$ pues ¡qué mejor copia de $\mathcal{A}$ que él mismo!

La definición de inmersión elemental que daré no será la condición anterior, pero demostraré que equivale a ella.

También veremos que la inmersión elemental es una relación cuya exigencia se sitúa entre el isomorfismo y la equivalencia elemental: implica equivalencia y es implicada por isomorfismo.

En resumen, la inmersión elemental se inserta en nuestro cuadro general de relaciones entre sistemas conforme a la figura siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{A} \stackrel{\sim}{\prec} \mathcal{B} & & \\ & \Nearrow & & \Searrow & \\ \mathcal{A} \cong \mathcal{B} & & & & \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \\ & & \Uparrow & & \\ & & \mathcal{A} \prec \mathcal{B} & & \end{array}$$

En el apartado 6 de este mismo capítulo veremos que la noción de inmersión elemental puede reducirse a la de equivalencia elemental entre ciertas extensiones de los sistemas de partida.

3.1. Definición

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos sistemas similares y L su lenguaje apropiado. Decimos que $\mathbf{h}$ es una inmersión elemental de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ syss:

i) $\mathbf{h}$ es una inmersión de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

ii) Para cada fórmula $\varphi \langle x_1 \ldots x_n \rangle \in \text{FOR(L)}$ y cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$ se cumple:

$$\mathcal{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathcal{B}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{h}(\mathbf{x}_n)] \text{ sat } \varphi.$$

Escribiremos $\mathcal{A} \stackrel{\sim}{\prec} \mathcal{B}$ para indicar que $\mathcal{A}$ está elementalmente inmerso en $\mathcal{B}$. Esto quiere decir que existe una inmersión elemental de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. □

Ejemplos

1) $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle \stackrel{\sim}{\prec} \langle \mathbb{R}, <_{\mathbb{R}} \rangle$. El orden de los racionales está inmerso elementalmente en el de los reales. Esto es evidente, pues demostramos que también era un subsistema elemental.

2) Entre los sistemas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ del ejemplo 2) de IV.1 se da también la inmersión elemental. Para demostrarlo bastaría con demostrar su isomorfismo.

3) Sea $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \cap [0, \infty)$ y $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} \cap [1, \infty)$. Es decir, los reales desde el cero y el uno, respectivamente. Es evidente que $\langle \mathbb{R}_1, <_{\mathbb{R}_1} \rangle \sqsubseteq \langle \mathbb{R}_0, <_{\mathbb{R}_0} \rangle$, pero no se cumple la relación de ser subsistema elemental. Sea $\psi = \exists y\, Pyx$. Está claro que $\mathcal{R}_1[1]$ no sat ψ pero que $\mathcal{R}_0[1]$ sat ψ.

Sin embargo, definiendo $\mathbf{h}$: $\mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_0$ así: $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 1$, se puede probar que es isomorfía, y por tanto, también $\mathbf{h}$ es inmersión elemental.

3.2. Proposición

$\mathbf{h}$ es una inmersión elemental de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ syss existe un sistema $\mathcal{C}$ tal que $\mathbf{h}$ es un isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C} < \mathcal{B}$.

Demostración

[$\Rightarrow$] Sea $\mathbf{h}$ una inmersión elemental de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Por i) de la definición, $\mathbf{h}$ es una inmersión de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Y por la proposición I.3.5.4, hay un sistema $\mathcal{C}$ tal que $\mathbf{h}$ es isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{B}$. Lo único que nos falta es demostrar que $\mathcal{C} < \mathcal{B}$. Utilizando el corolario 2.2 de IV lo que necesitamos es ver que para cada $\varphi(x_1 \ldots x_n) \in$ FOR(L) se cumple:

$$\mathcal{C}[\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathcal{B}\, [\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n] \text{ sat } \varphi,$$

para cada $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \in \mathbf{C}$.

Por la condición ii) de la definición 3.1

$$\mathcal{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathcal{B}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{h}(\mathbf{x}_n)] \text{ sat } \varphi,$$

para cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$.

Por el corolario II.5.2 al ser $\mathbf{h}$ isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}$ se cumple lo siguiente:

$$\mathcal{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathcal{C}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{h}(\mathbf{x}_n)] \text{ sat } \varphi$$

para cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$.

De aquí se sigue que

$$\mathcal{C}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{h}(\mathbf{x}_n)] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathcal{B}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{h}(\mathbf{x}_n)] \text{ sat } \varphi, \text{ para cada } \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}.$$

Al ser $\mathbf{h}$ isomorfismo, la función $\mathbf{h}$ es biyectiva, por lo que

$$\mathcal{C}[\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathcal{B}[\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n] \text{ sat } \varphi,$$

para cada $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \in \mathbf{C}$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que exista un sistema $\mathscr{C}$ tal que $\mathbf{h}$ es isomorfismo de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C} \prec \mathscr{B}$. Es fácil ver que:

i) $\mathbf{h}$ es inmersión de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ (por I.3.5.4).

ii) Para cada $\varphi\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in$ FOR(L) y cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$ se cumple:

$$\mathscr{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathscr{B}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{h}(\mathbf{x}_n)] \text{ sat } \varphi$$

(por el corolario II.5.2 y el IV.2.2). ■

3.3. Proposición

Si $\mathbf{h}$ es un isomorfismo de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$, entonces $\mathbf{h}$ es inmersión elemental de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$.

La demostracion es sencillísima, basta con observar que todo isomorfismo es, en especial, una inmersión y utilizar el corolario II.5.2.

3.4. Proposición

Sea $\mathbf{h}$ una inmersión de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$. $\mathbf{h}$ es una inmersión elemental de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ syss $\mathbf{h}[\mathscr{A}] \prec \mathscr{B}$.

Demostración

Sea $\mathbf{h}$ una inmersión de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$; es decir, $\mathscr{A} \overset{\mathbf{h}}{\sqsubseteq} \mathscr{B}$.

[$\Rightarrow$] Supongamos que $\mathbf{h}$ sea una inmersión elemental de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$; es decir, $\mathscr{A} \overset{\mathbf{h}}{\prec} \mathscr{B}$.

Queremos demostrar que $\mathbf{h}[\mathscr{A}] \prec \mathscr{B}$.

Sabemos (Problema 4 de I) que $\mathbf{h}[\mathscr{A}]$ es un subsistema de $\mathscr{B}$; es decir, que $\mathbf{h}[\mathscr{A}] \sqsubseteq \mathscr{B}$.

También sabemos (I.3.5.2) que $\mathscr{A} \cong \mathbf{h}[\mathscr{A}]$.

Por consiguiente, para cada $\varphi\langle x_1 \ldots x_n\rangle$ y cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$ se cumple:

$$\mathscr{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathbf{h}[\mathscr{A}][\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{h}(\mathbf{x}_n)] \text{ sat } \varphi.$$

Pero, $\mathscr{A} \overset{\mathbf{h}}{\prec} \mathscr{B}$ por hipótesis y, por lo tanto (Definición 3.1)

$$\mathscr{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathscr{B}[\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{h}(\mathbf{x}_n)] \text{ sat } \varphi$$

Puesto que $\mathbf{h}$ es bifunción de $\mathscr{A}$ en $\mathbf{h}[\mathscr{A}]$, se cumplirá que para cada $\varphi\langle x_1 \ldots x_n\rangle \in$ FOR(L): $\mathbf{h}[\mathscr{A}][\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n]$ sat φ syss $\mathscr{B}[\mathbf{y}_1 \ldots \mathbf{y}_n]$ sat φ, para cada $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \in \mathbf{h}[\mathscr{A}]$.

[$\Leftarrow$] Es evidente que si $\mathscr{A} \overset{\mathbf{h}}{\sqsubseteq} \mathscr{B}$ y $\mathbf{h}[\mathscr{A}] \prec \mathscr{B}$, entonces, $\mathscr{A} \overset{\mathbf{h}}{\prec} \mathscr{B}$.

Sólo hay que aplicar la proposición 3.2 y el hecho de que $\mathscr{A} \cong \mathbf{h}[\mathscr{A}]$ (I.3.5.2). ■

3.5. Proposición

Si $\mathbf{h}$ es una inmersión elemental de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ —es decir, $\mathcal{A} \overset{\mathbf{h}}{<} \mathcal{B}$— entonces $\mathcal{A}$ es un subsistema elemental de un sistema $\mathcal{C}$ isomorfo a $\mathcal{B}$ —es decir, $\mathcal{A} < \mathcal{C} \overset{\overline{\mathbf{h}}}{\cong} \mathcal{B}$—. Además, $\mathbf{h} = \overline{\mathbf{h}} \upharpoonright \mathbf{A}$.

Demostración

Os la dejo como ejercicio. Utilizad los resultados de 1.3.5.5. ■

3.6. *Ejercicios*

1) ¿Recordáis el gráfico de la introducción a este apartado?

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A} \overset{\sim}{<} \mathcal{B} & \\ \Nearrow & & \Searrow \\ \mathcal{A} \cong \mathcal{B} & & \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \\ & \Uparrow & \\ & \mathcal{A} < \mathcal{B} & \end{array}$$

Justificadlo en todas las direcciones.

2) Encontrad un ejemplo de sistemas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ tales que $\mathcal{A} \overset{\sim}{<} \mathcal{B}$ pero no $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ni $\mathcal{A} < \mathcal{B}$.

3) Demostrad la proposición 3.5.

4. TEORIA

La parte más interesante y divertida de la teoría de modelos comienza cuando investigamos acerca de los conjuntos de sentencias que constituyen una teoría.

Como dije anteriormente, una teoría es un conjunto de sentencias cerrado bajo la relación de deducibilidad, o lo que es lo mismo en primer orden, la de consecuencia.

Con las teorías tenemos de partida un problema de tamaño: el conjunto de sus sentencias es siempre infinito, pues todos los teoremas lógicos son sentencias de cualquier teoría. ¿Cómo presentamos o definimos una teoría, cómo describir a un conjunto infinito? Hay casos en los que la teoría que nos interesa es lo que a veces se denomina teoría de un sistema, o de una clase de sistemas. Tenemos un sistema —por ejemplo, $\mathcal{N}$, el de los números naturales con las operaciones aritméticas usuales— y queremos estudiar el conjunto de las sentencias verdaderas en $\mathcal{N}$.

En otras ocasiones, más felices, para describir una teoría podemos utilizar un conjunto decidible de sentencias, a las que llamamos axiomas, y considerar que las sentencias de nuestra teoría son sus consecuencias lógicas.

Una propiedad fundamental, que no todas las teorías comparten es la de comple-

tud. Diremos que un conjunto Δ de sentencias es completo cuando dada una sentencia cualquiera de su lenguaje, o ella, o su negación es deducible de Δ.

El concepto de completud de una teoría está muy estrechamente vinculado al de equivalencia elemental y al de decisión. En particular, si Δ es una teoría completa, la clase de sus modelos está bastante bien definida ya que dos modelos cualesquiera de Δ son elementalmente equivalentes. En este capítulo demostraremos algunos teoremas relativos a la completud de teorías pero la problemática es tan amplia que merece y ocupa capítulo aparte, el VII.

Lo que sí haremos en este capítulo, concretamente en este apartado, es relacionar este concepto con el previamente definido de la maximalidad de un conjunto de sentencias. Tal y como hemos definido la completud de una teoría, se trata de una propiedad sintática, de una propiedad íntimamente relacionada con el cálculo deductivo y con el propio conjunto de sentencias que integran la teoría. Sin embargo, en el capítulo III argumentábamos que la completud era una propiedad que, de cumplirse, mostraba la equivalencia entre la sintaxis y la semántica de un cierto lenguaje formal. Hay quienes prefieren reservar la palabra completud para las teorías y decir que los cálculos deductivos son suficientes. Yo creo que se puede mantener el vocablo completud en ambos casos porque son distintas formulaciones de un mismo problema, al menos en su génesis. Me explicaré mejor.

Normalmente estamos interesados en un sistema o una clase de sistemas; por ejemplo el de los números naturales, $\mathcal{N}$, o la clase $\mathcal{K}$ de todos los sistemas que son grupos. Proponemos un conjunto de sentencias Δ, en el lenguaje apropiado, que cifre las características del sistema, o clase de sistemas. Por descontado, en Δ ponemos sólo sentencias verdaderas en los sistemas considerados, pero ¿están todas las precisas? En el primer caso, ¿se cumple que si φ es verdadera en $\mathcal{N}$, es deducible de Δ? En el segundo caso, ¿se cumple que si φ es verdadera en cada uno de los sistemas que integran $\mathcal{K}$, es deducible del Δ propuesto? Cuando la respuesta es afirmativa podemos decir que Δ es completo respecto del modelo $\mathcal{N}$, en el primer caso y que Δ es completo respecto de la clase $\mathcal{K}$ de modelos, en el segundo.

Suponed que nuestra clase de sistemas es tan amplia que incluye a todos los de un cierto tipo $\langle \mu, \delta \rangle$. Una sentencia verdadera en todos ellos será lo que llamamos una fórmula lógicamente válida y preguntarnos si el conjunto $\emptyset$ de sentencias es completo respecto de la clase de todos los sistemas es sencillamente preguntarse si el cálculo deductivo es completo en el sentido débil definido en el capítulo 3. Por lo que respecta al sentido fuerte de la completud del cálculo —es decir, que si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$ —esto equivale a preguntar si Γ es completo respecto de la clase formada por todos los sistemas que son modelo de Γ. Miradas así las cosas, nosotros en el capítulo III lo que hicimos es demostrar 1.º) que $\emptyset$ es completo respecto de la clase $\mathcal{M}$ de todos los sistemas y 2.º) que cualquier conjunto Γ de sentencias es completo respecto de la clase formada por los modelos de Γ.

En este capítulo cuando decimos que una teoría Δ es completa —es decir, que $\Delta \vdash \varphi$ o $\Delta \vdash \neg\varphi$ para cada φ— en realidad lo que afirmamos es que Δ es completo respecto de una clase formada por un único modelo, suponiendo que Δ no sea contradictoria. Esto lo demostrareis vosotros, en el problema 7.

Por otra parte, si Δ fuera completo respecto de una clase $\mathcal{K}$ de sistemas podríamos también decir, y lo haremos, que Δ axiomatiza $\mathcal{K}$.

He querido hacer hincapié en estas conexiones, por lo demás triviales, porque me parece que en el presente no se tiene conciencia de ellas, al menos en los niveles elementales de la enseñanza universitaria.

4.1. Definición

Sea L un lenguaje de primer orden.

T es una teoría en L syss $T \subseteq SEN(L)$ y para cada $\varphi \in SEN(L)$ se cumple: si $T \vdash \varphi$ entonces $\varphi \in T$. □

Por consiguiente, una teoría es un conjunto de sentencias cerrado por la relación de deducibilidad. Puesto que por los teoremas de corrección y completud sabemos que deducibilidad y consecuencia son en primer orden nociones equivalentes, podríamos haber definido a las teorías utilizando consecuencia en vez de deducibilidad. Es decir, vale la proposición siguiente:

4.2. Proposición

T es una teoría en L syss $T \subseteq SEN(L)$ y para cada $\varphi \in SEN(L)$ se cumple:

si $T \vDash \varphi$ entonces $\varphi \in T$. ■

Ejemplos

1) Dado un lenguaje L, el conjunto de las sentencias de L que son teoremas lógicos de L es una teoría. Esta es la menor teoría en L, pues cualquier otra teoría en L la contendrá.

2) Por otra parte, SEN(L) es también una teoría. Se trata en este caso de la mayor teoría en L.

3) Dado un conjunto $\Delta \subseteq SEN(L)$ el conjunto $\{\varphi \in SEN(L)/\Delta \vdash \varphi\}$ es una teoría.

Como recordareis, en el capítulo anterior definimos el ser Δ contradictorio mediante la condición de que cada sentencia del lenguaje fuera deducible de Δ.

Por consiguiente, SEN(L) es una teoría contradictoria, y lo que es más, es la única teoría contradictoria que se puede dar, pues si T es una teoría, todas las sentencias deducibles de T están en T, y si T es contradictoria, todas las sentencias del lenguaje se deducen de T. Vale, por consiguiente, lo siguiente:

4.3. Proposición

Sea T una teoría. T es consistente syss $T \neq SEN(L)$.

(La demostración es muy sencilla). ■

4.4. Definición

$\Delta \subseteq SEN(L)$ es completo syss para cada $\varphi \in SEN(L)$ entonces $\Delta \vdash \varphi$ o $\Delta \vdash \neg\varphi$. □

4.5. Proposición

$\Delta \subseteq SEN(L)$ es máximamente consistente syss Δ es una teoría consistente y completa.

Demostración

[⇒] Sea Δ máximamente consistente. Evidentemente, Δ es consistente. Δ es una teoría (II.2.i).

Además, supongamos que hay un $\varphi \in SEN(L)$ tal que $\Delta \nvdash \varphi$ y que $\Delta \nvdash \neg\varphi$. Hay dos posibilidades: que $\varphi \in \Delta$ o que $\varphi \notin \Delta$. En el primer caso, $\Delta \vdash \varphi$. En el segundo, $\neg\varphi \in \Delta$ (III.2.5.iii)) y por lo tanto $\Delta \vdash \neg\varphi$.

[⇐] Supongamos que Δ sea una teoría consistente y completa. Para ver que es máximamente consistente supongamos que $\varphi \notin \Delta$. Por ser una teoría, $\Delta \nvdash \varphi$. Y por ser completa, $\Delta \vdash \neg\varphi$. En tal caso, $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ y, por lo tanto, $\Delta \cup \{\varphi\}$ es contradictorio. ■

4.6. Notación

Dado un conjunto $\Delta \subseteq SEN(L)$, llamaremos consecuencias de Δ, $CON(\Delta)$ al conjunto de las sentencias de L que son sus consecuencias lógicas, es decir, $CON(\Delta) = \{\varphi \in SEN(L)/\Delta \vDash \varphi\}$.

Sabemos que $CON(\Delta)$ es también el conjunto de las sentencias de L que se deducen lógicamente de Δ.

4.7. *Ejercicios*

1) Demostrad que $\Delta \subseteq SEN(L)$ es una teoría syss $\Delta = CON(\Delta)$.

2) Demostrad que si $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, entonces $CON(\Delta_1) \subseteq CON(\Delta_2)$.

3) Sean T_1 y T_2 dos teorías tales que i) $T_1 \subseteq T_2$, ii) T_1 es completa y iii) T_2 es consistente. Demostrad que $T_1 = T_2$.

4) Demostrad que para cada $\Delta \subseteq SEN(L)$, $CON(\Delta)$ es una teoría.

Problema 5

¿Valdría el bicondicional en el ejercicio 2? ¿Por qué?

De las definiciones y proposiciones anteriores se pueden extraer varias conclusiones. Puesto que CON(Δ) es siempre una teoría, una manera sencilla de presentar teorías sería elegir Δ fáciles de describir. En Δ no tenemos que incluir teoremas lógicos ni sentencias interdeducibles pues en cualquier caso están en CON(Δ). La idea sería quedarse con el menor Δ capaz de generar por deducibilidad todas las sentencias de la teoría. Si siempre fuera posible encontrar conjuntos Δ finitos, o al menos decidibles, no tendríamos problemas.

¿Sucede siempre así?

Este problema puede parecer un poco absurdo si no se tiene en cuenta cual es el proceso habitual de conocimiento de teorías. Normalmente tenemos un sistema o una clase de sistemas y la teoría la constituyen precisamente las sentencias verdaderas en el sistema o en la clase de sistemas. Elegir de entre ellas un conjunto Δ decidible y capaz de generarlas a todas no es siempre posible. Este problema lo abordaremos en el capítulo siguiente, pero en éste voy a definir los conceptos que necesitaremos para poder hacerlo. Concretamente, definiré lo que llamaremos teoría de un sistema, o de una clase de sistemas, y modelos de un conjunto de sentencias.

5. TEORIA DE UNA CLASE DE SISTEMAS Y MODELOS DE UN CONJUNTO DE SENTENCIAS

En todo este apartado supondremos que $\langle \mu, \delta \rangle$ es un tipo determinado, aunque fijado arbitrariamente, y que L es el lenguaje adecuado para todos los sistemas de este tipo.

Sea $\mathcal{M}$ la clase de todos los sistemas de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$. En lo que sigue todos los sistemas que mencionaré estarán en $\mathcal{M}$.

5.1. Definición

Sea $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$. Llamaremos teoría de $\mathcal{K}$ al conjunto de todas las sentencias de L verdaderas en todos los sistemas de $\mathcal{K}$. Es decir,

$$\mathrm{TEO}(\mathcal{K}) = \{\varphi \in \mathrm{SEN(L)} / \mathcal{A} \text{ sat } \varphi, \text{ para cada } \mathcal{A} \in \mathcal{K}\}. \ \square$$

5.2. Proposición

Para cada $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$, TEO($\mathcal{K}$) es una teoría.

Demostración

Por el ejercicio 1 de 4.7, nos bastará con demostrar que TEO($\mathcal{K}$) = CON(TEO($\mathcal{K}$)). En primer lugar, TEO($\mathcal{K}$) $\subseteq$ CON(TEO($\mathcal{K}$)) por definición de CON.

Veremos también que CON(TEO($\mathcal{K}$)) $\subseteq$ TEO($\mathcal{K}$).

En efecto, sea $\varphi \in$ CON(TEO($\mathcal{K}$)). Esto quiere decir que TEO($\mathcal{K}$) $\models \varphi$. Por tanto, para cada sistema $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$: si $\mathcal{A}$ es modelo de *TEO($\mathcal{K}$)* entonces $\mathcal{A}$ es modelo de φ. Por consiguiente, para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A}$ es modelo de φ (pues todo $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ es modelo de TEO($\mathcal{K}$)). Luego $\varphi \in$ TEO($\mathcal{K}$). ■

5.3. Proposición

Para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$, TEO($\mathcal{A}$) es una teoría completa.

Demostración

Estoy escribiendo TEO($\mathcal{A}$) en vez de TEO($\{\mathcal{A}\}$). Por la proposición anterior, es una teoría. Veamos que es completa. Sea $\varphi \in$ SEN(L). Hay dos posibilidades: $\mathcal{A}$ sat φ o $\mathcal{A}$ sat $\neg\varphi$. Si $\mathcal{A}$ sat φ entonces $\varphi \in$ TEO($\mathcal{A}$) y por tanto, TEO($\mathcal{A}$) $\vdash \varphi$. De forma similar, si $\mathcal{A}$ sat $\neg\varphi$ entonces TEO($\mathcal{A}$) $\vdash \neg\varphi$. ■

Ejemplos

1) En el lenguaje de tipo $\langle 0,2; \emptyset \rangle$, el de los grupos, consideremos TEO([Grup.]) donde [Grup.] es la clase de todos los sistemas que son grupo. TEO([Grup.]) es el conjunto de las sentencias verdaderas en todos los grupos. Naturalmente, $\forall x \exists y\, fxy = e$ pertenece a TEO([Grup.]). Sin embargo, $\forall xy\, fyx = fxy$ no pertenece a TEO([Grup.]) pues hay grupos no conmutativos.

2) En el mismo lenguaje del ejemplo anterior, sea [Grup. Com] la clase de todos los grupos conmutativos. La sentencia $\forall xy\, fxy = fyx$ sí que pertenece a TEO([Grup. Com]). Además, todas las sentencias de TEO([Grup.]) están en TEO([Grup. Com]) pues veremos que siempre que una clase de sistemas esté incluida en otra, sus correspondientes teorías muestran la inclusión contraria.

3) Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \cdot \rangle$ el sistema de los naturales. TEO($\mathcal{N}$) es el conjunto de todas las sentencias verdaderas en $\mathcal{N}$.

Por lo que comentaba al final del apartado anterior, TEO($\mathcal{N}$) no podrá expresarse como CON(Δ) siendo Δ decidible. Sin embargo, TEO([Grup.]) y TEO([Grup. Com]) sí que serán expresables de esa forma.

5.4. Definición

Sea $\Sigma \subseteq SEN(L)$. Llamaremos modelos de Σ a la clase de todos los sistemas que son modelo de Σ.

$$MOD(\Sigma) = \{\mathcal{A} \in \mathcal{M} / \mathcal{A} \text{ sat } \varphi, \text{ para cada } \varphi \in \Sigma\}. \ \square$$

5.5. Proposición

Para cada $\Sigma \subseteq SEN(L)$, $TEO(MOD(\Sigma)) = CON(\Sigma)$.

Demostración

$\varphi \in CON(\Sigma)$ syss $\Sigma \vDash \varphi$. Es decir, para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$: si $\mathcal{A}$ es modelo de Σ, entonces $\mathcal{A}$ es modelo de φ. Esto es lo mismo que decir que para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$: si $\mathcal{A} \in MOD(\Sigma)$ entonces $\mathcal{A}$ es modelo de φ. Y esto es precisamente la condición de pertenencia a $TEO(MOD(\Sigma))$. ■

5.6. Proposición

Para cada $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ y $\Delta \subseteq SEN(L)$ se cumple:

$$\mathcal{K} \subseteq MOD(\Delta) \text{ syss } \Delta \subseteq TEO(\mathcal{K}).$$

Demostración

Sea $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ y $\Delta \subseteq SEN(L)$.

[$\Rightarrow$] Supongamos que $\mathcal{K} \subseteq MOD(\Delta)$. Esto quiere decir que para cada sistema $\mathcal{A}$ se cumple:

$$\text{si } \mathcal{A} \in \mathcal{K} \text{ entonces } \mathcal{A} \in MOD(\Delta).$$

Sea $\varphi \in \Delta$ una sentencia cualquiera. Para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A}$ sat φ —ya que $\mathcal{A}$ es modelo de Δ—. Por tanto, $\varphi \in TEO(\mathcal{K})$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $\Delta \subseteq TEO(\mathcal{K})$. Y sea $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ un elemento cualquiera de $\mathcal{K}$. Queremos demostrar que $\mathcal{A} \in MOD(\Delta)$. Para ello lo único que hace falta es ver que cada fórmula de Δ es satisfecha por $\mathcal{A}$. Sea $\varphi \in \Delta$. $\varphi \in TEO(\mathcal{K})$ por hipótesis. Por consiguiente, para cada sistema $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{B}$ sat φ. Puesto que $\mathcal{A}$ es uno de ellos, $\mathcal{A}$ sat φ. ■

5.7. *Ejercicios*

1) Demostrad que si $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$, entonces $\mathrm{TEO}(\mathcal{K}_2) \subseteq \mathrm{TEO}(\mathcal{K}_1)$.

2) Demostrad que $\mathrm{TEO}(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) = \mathrm{TEO}(\mathcal{K}_1) \cap \mathrm{TEO}(\mathcal{K}_2)$.

3) Sea $\varnothing$ el conjunto vacío de sentencias, ¿a qué clase de sistemas representa $\mathrm{MOD}(\varnothing)$?

Sea $\varnothing$ el conjunto vacío de sistemas, ¿a qué conjunto de sentencias representa $\mathrm{TEO}(\varnothing)$?

4) Demostrad que si $\Sigma \subseteq \Delta$, entonces $\mathrm{MOD}(\Delta) \subseteq \mathrm{MOD}(\Sigma)$.

5) Demostrad que

a) $\mathrm{MOD}(\Sigma \cup \Delta) = \mathrm{MOD}(\Sigma) \cap \mathrm{MOD}(\Delta)$.

b) $\mathrm{MOD}(\mathrm{TEO}(\mathrm{MOD}(\Delta))) = \mathrm{MOD}(\Delta)$.

c) $\mathrm{TEO}(\mathrm{MOD}(\mathrm{TEO}(\mathcal{K}))) = \mathrm{TEO}(\mathcal{K})$.

d) $\mathrm{MOD}(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}) = \mathrm{MOD}(\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\})$.

6) ¿Son siempre verdaderas las igualdades siguientes?

a) $\mathrm{MOD}(\mathrm{TEO}(\mathcal{K})) = \mathcal{K}$.

b) $\mathrm{TEO}(\mathrm{MOD}(\Delta)) = \Delta$.

Problema 6

Demostrad que T es una teoría consistente y completa si y sólo si $T = \mathrm{TEO}(\mathcal{A})$, para un cierto sistema $\mathcal{A}$.

Problema 7

Demostrad el siguiente teorema.
Para cada $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{M}$, las condiciones que siguen son equivalentes:

i) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

ii) $\mathrm{TEO}(\mathcal{A}) = \mathrm{TEO}(\mathcal{B})$.

iii) $\mathcal{B} \in \mathrm{MOD}(\mathrm{TEO}(\mathcal{A}))$.

6. EXPANSION POR ENUMERACION. DIAGRAMAS

En el capítulo I dijimos que dado un sistema $\mathscr{A}$ y una sucesión $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_k \rangle_{k<\beta}$ de elementos de su universo, mediante $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ representábamos al sistema que consiste en añadir al sistema $\mathscr{A}$, como individuos destacados, todos los que integran $\bar{\mathbf{a}}$. Dado que $\mathbf{A}$ puede muy bien ser supernumerable, en el sistema $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ se destacan un número supernumerable de individuos, siempre que β sea supernumerable, incluso en el caso en que $\bar{\mathbf{a}}$ sea una enumeración completa y sin repeticiones de $\mathbf{A}$. Y en el lenguaje adecuado a dicho sistema, $L(\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle)$, necesitamos un conjunto de nombres que sea supernumerable. Como ya comenté con anterioridad, podría parecer extraño un lenguaje que jamás pudiera ser escrito (ni, por supuesto, hablado). Intuitivamente un nombre debiera ser algo que pudiera ser escrito para así ser reconocido mediante inspección ocular. Para que esto ocurriera haría falta que el conjunto de nombres fuera finito o, a lo sumo, recursivo. Sin embargo, como sabéis, nuestros lenguajes lo son en un sentido muy laxo y aceptamos como nombre a cualquier objeto matemático.

Utilizando expansiones de sistemas y, muy especialmente, sistemas $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ donde $\bar{\mathbf{a}}$ es una enumeración completa de $\mathbf{A}$, veremos que las relaciones entre sistemas de: subsistema elemental, inmersión elemental e incluso la de isomorfía se reducen a la de equivalencia elemental de ciertas expansiones de los sistemas originales.

También introducimos los diagramas abiertos, y los completos, de un sistema. Son éstos ciertos conjuntos de sentencias en el lenguaje ampliado $L(\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle)$. El método de los diagramas permite construir modelos a partir de una teoría basada en el diagrama, que a su vez ha sido construido utilizando la extensión de un sistema. Se parece en algo a la construcción de Henkin de un modelo a partir de un conjunto de sentencias, pero como me hizo notar Hodges, no es lo mismo: en el método de los diagramas el origen es el sistema ampliado. Yo había atribuido siempre la paternidad de este método a Henkin y a Robinson y pensado que la prueba de completud era una aplicación del mismo, pero parece que no estaba en lo cierto, que aunque el término diagrama fuera realmente acuñado por Robinson, ni el concepto era nuevo*, ni la demostración es realmente una aplicación del método. Lo que sucede es que los conjuntos máximamente consistentes y ejemplificados son el diagrama completo de algún sistema.

En el capítulo V, como aplicación del método mencionado, construiremos un sistema que nos permita probar compacidad directamente, y no como corolario de completud.

6.1. Teorema

Si $\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$, las condiciones siguientes son equivalentes:

1) $\mathscr{A} < \mathscr{B}$.

---

* El concepto de diagrama aparece en el Tractatus de Wittgenstein de donde lo tomó Carnap.

2) Para cada sucesión finita de elementos de A, $\bar{a} = \langle a_k \rangle_{1 \leq k \leq n}$ se cumple:

$$\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{a} \rangle \text{ en un lenguaje } L \cup \langle c_k \rangle_{k \in \{1,\dots,n\}}$$

que contiene al original y posee nombres para los nuevos individuos destacados.

3) Para cada sucesión de elementos de A, $\bar{a} = \langle a_k \rangle_{k<\beta}$ con β arbitrario, se cumple:

$$\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle < \langle \mathcal{B}, \bar{a} \rangle \text{ en } L \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$$

4) Para cada sucesión de elementos de A, $\bar{a} = \langle a_k \rangle_{k<\beta}$ con β arbitrario, se cumple:

$$\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{a} \rangle \text{ en } L \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$$

Demostración

Vamos a demostrar las siguientes implicaciones: 1) ⇒ 3), 3) ⇒ 4), 4) ⇒ 2) y 2) ⇒ 1).

6.1.1. *Proposición. 1) ⇒ 3)*

Supongamos que $\mathcal{A} < \mathcal{B}$.

Es evidente que $\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle \sqsubseteq \langle \mathcal{B}, \bar{a} \rangle$ pues $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ y los nuevos individuos destacados en ambos sistemas son los mismos y están ordenados en la misma forma.

Ahora queremos demostrar que para cada fórmula φ de $L \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$ y cada asignación $\mathcal{I}$ de $\mathcal{V}$ en A se cumple:

$$\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle\ \mathcal{I} \text{ sat } \varphi \text{ syss } \langle \mathcal{B}, \bar{a} \rangle\ \mathcal{I} \text{ sat } \varphi.$$

Sea $\varphi \in FOR(L \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta})$ y supongamos, para simplificar la notación, que en φ sólo hay una constante nueva, c_i —naturalmente, si hubiera más, la demostración sería básicamente la misma—. Sea x una variable que no está en φ. Asociaremos con φ una fórmula φ' que es el resultado de borrar c_i y poner x en su lugar; es decir,

$$\mathbf{S}_x^{c_i}\, \varphi' = \varphi.$$

Evidentemente,

$$\varphi' \in FOR(L) \text{ y } LBR(\varphi') = LBR(\varphi) \cup \{x\}.$$

Sea $\mathcal{I}\colon \mathcal{V} \to A$ una asignación cualquiera. Claramente,

$$\langle \mathcal{A}, \bar{a} \rangle\ \mathcal{I}(c_i) = a_i = \langle \mathcal{B}, \bar{a} \rangle\ \mathcal{I}\ (c_i).$$

Tomemos la asignación variante $\mathcal{I}^{\mathbf{a}_i}_x$, que es también expresable como $\mathcal{I}_x^{\langle\mathcal{A},\,\bar{\mathbf{a}}\rangle\mathcal{I}(c_i)}$ y como $\mathcal{I}_x^{\langle\mathcal{B},\,\bar{\mathbf{a}}\rangle\mathcal{I}(c_i)}$.

Puesto que $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ se cumple:

$$\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{a}_i}_x \text{ sat } \varphi' \quad \text{syss } \mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{a}_i}_x \text{ sat } \varphi'$$

Pero,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathcal{I}^{\mathbf{a}_i}_x \text{ sat } \varphi' \quad & \text{syss } \langle\mathcal{A},\bar{\mathbf{a}}\rangle\ \mathcal{I}_x^{\langle\mathcal{A},\,\bar{\mathbf{a}}\rangle\mathcal{I}(c_i)} \text{ sat } \varphi' \\ & \text{syss } \langle\mathcal{A},\bar{\mathbf{a}}\rangle\ \mathcal{I} \text{ sat } \mathbf{S}^{c_i}_x\ \varphi' \\ & \text{syss } \langle\mathcal{A},\bar{\mathbf{a}}\rangle\ \mathcal{I} \text{ sat } \varphi\end{aligned}$$

(Por el ejercicio 5) de II.5.3, y el teorema de sustitución II.4.2).
De forma similar,

$$\mathcal{B}\mathcal{I}^{\mathbf{a}_i}_x \text{ sat } \varphi' \quad \text{syss } \langle\mathcal{B},\bar{\mathbf{a}}\rangle\ \mathcal{I} \text{ sat } \varphi$$

Por lo tanto,

$$\langle\mathcal{A},\bar{\mathbf{a}}\rangle\ \mathcal{I} \text{ sat } \varphi \quad \text{syss } \langle\mathcal{B},\bar{\mathbf{a}}\rangle\ \mathcal{I} \text{ sat } \varphi$$

6.1.2. *Proposición: 3) $\Rightarrow$ 4) y 4) $\Rightarrow$ 2)*

3) $\Rightarrow$ 4) lo demostraréis en el ejercicio 2) de IV.2.8.
4) $\Rightarrow$ 2) es obvio.

6.1.3. *Proposición: 2) $\Rightarrow$ 1)*

Queremos demostrar que para cada fórmula de $\varphi \in \mathrm{FOR(L)}$ y cada $\mathcal{I}\colon \mathcal{V} \to \mathbf{A}$ se verifica:

$$\mathcal{A}\mathcal{I} \text{ sat } \varphi \quad \text{syss } \mathcal{B}\mathcal{I} \text{ sat } \varphi.$$

Sea $\mathrm{LBR}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y sea $\mathcal{I}\colon \mathcal{V} \to \mathbf{A}$, donde $\mathcal{I}(x_1) = \mathbf{a}_1, \ldots, \mathcal{I}(x_n) = \mathbf{a}_n$. Sean $c_1, \ldots, c_n$ constantes nuevas. Y sea $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\rangle$.
La fórmula

$$\varphi^* = \mathbf{S}^{c_1 \ldots c_n}_{x_1 \ldots x_n}\ \varphi \in \mathrm{FOR}(\mathrm{L} \cup \langle c_i\rangle_{i \in \{1,\ldots,n\}})$$

y puesto que suponemos que 2) vale, de $\langle \mathscr{A}, \mathbf{\bar{a}} \rangle \equiv \langle \mathscr{B}, \mathbf{\bar{a}} \rangle$ se sigue que

$$\langle \mathscr{A}, \mathbf{\bar{a}} \rangle\ \mathscr{I} \text{ sat } \varphi^* \text{ syss } \langle \mathscr{B}, \mathbf{\bar{a}} \rangle\ \mathscr{I} \text{ sat } \varphi^*.$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{A}, \mathbf{\bar{a}} \rangle\ \mathscr{I} \text{ sat } \varphi^* \ &\text{syss } \langle \mathscr{A}, \mathbf{\bar{a}} \rangle\ \mathscr{I} \text{ sat } \mathbf{S}^{c_1 \ldots c_n}_{x_1 \ldots x_n}\ \varphi \\
&\text{syss } \langle \mathscr{A}, \mathbf{\bar{a}} \rangle\ \mathscr{I}^{\langle \mathscr{A}, \mathbf{\bar{a}} \rangle \mathscr{I}(c_1) \ldots \langle \mathscr{A}, \mathbf{\bar{a}} \rangle \mathscr{I}(c_n)}_{x_1 \ldots x_n} \text{ sat } \varphi \\
&\text{syss } \langle \mathscr{A}, \mathbf{\bar{a}} \rangle\ \mathscr{I} \text{ sat } \varphi \\
&\text{syss } \mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \varphi
\end{aligned}$$

(Por el teorema de sustitución II.4.2 y el ejercicio 5) de II.5.3.)
De forma similar,

$$\langle \mathscr{B}, \mathbf{\bar{a}} \rangle\ \mathscr{I} \text{ sat } \varphi^* \text{ syss } \mathscr{B}\mathscr{I} \text{ sat } \varphi$$

Por consiguiente, $\mathscr{A}\mathscr{I}$ sat φ syss $\mathscr{B}\mathscr{I}$ sat φ. ■

6.2. Teorema. (Criterio de inmersibilidad elemental)

Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ sistemas similares y **f**: **A** → **B**. **f** es una inmersión elemental de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$ syss

$$\langle \mathscr{A}, \mathbf{\bar{a}} \rangle \equiv \langle \mathscr{B}, \mathbf{\bar{b}} \rangle \text{ en el lenguaje L} \cup \langle c_k \rangle_{k < \beta}$$

Siendo $\mathbf{\bar{a}} = \langle \mathbf{a}_k \rangle_{k<\beta}$ una enumeración completa de **A** y **b** la sucesión de las imágenes de los elementos de $\mathbf{\bar{a}}$, es decir, para cada $k < \beta$: $\mathbf{b}_k = \mathbf{f}(\mathbf{a}_k)$. β es mayor o igual que la cardinalidad de $\mathscr{A}$.

Demostración

Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ sistemas similares.

[⇒] Supongamos que **f** es una inmersión elemental de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$. Sabemos (definición 3.1) que en este caso las mismas fórmulas valen en los dos sistemas tomando como parámetros en $\mathscr{B}$ la sucesión de las imágenes de los parámetros de $\mathscr{A}$. Para demostrar la equivalencia elemental de los sistemas extendidos vamos a asociar a cada fórmula de L ∪ $\langle c_k \rangle_{k<\beta}$ una de L.

Concretamente, a $\varphi \in$ FOR(L ∪ $\langle c_k \rangle_{k<\beta}$) le asociamos $\varphi' \in$ FOR(L) tal que

$$\mathbf{S}^{c_{i_1} \ldots c_{i_m}}_{y_1 \ldots y_m}\ \varphi' = \varphi.$$

siendo $c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}$ las constantes nuevas que ocurren en φ y $y_1, \ldots, y_m$ variables que no están en φ.

Sabemos (ejercicio 6) de II.5.3) que para cada $\varphi \in \mathrm{SEN}(\mathrm{L} \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta})$ se cumple:

$$\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathscr{A}[\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_m}] \text{ sat } \varphi' \langle y_1, \ldots, y_m \rangle$$

Además (definición IV.3.1) por ser $\mathscr{A} \overset{\mathbf{f}}{\prec} \mathfrak{B}$,

$$\mathscr{A}[\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_m}] \text{ sat } \varphi' \langle y_1, \ldots, y_m \rangle \text{ syss}$$
$$\mathfrak{B}[\mathbf{f}(\mathbf{a}_{i_1}) \ldots \mathbf{f}(\mathbf{a}_{i_m})] \text{ sat } \varphi' \langle y_1, \ldots, y_m \rangle,$$

para cada $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_m} \in \mathbf{A}$.

Por lo tanto, $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ en $\mathrm{L} \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$. (Ejercicio 6) de II.3.5 y definición de $\equiv$).

[$\Leftarrow$] Sea $\mathbf{f}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ en $\mathrm{L} \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$.

Habría que demostrar que $\mathbf{f}$ es una inmersión elemental de $\mathscr{A}$ en $\mathfrak{B}$. Os lo dejo como ejercicio. ■

6.3. Teorema

Sean $\mathscr{A}$ y $\mathfrak{B}$ sistemas similares y $\mathbf{f}$ una inmersión elemental de $\mathscr{A}$ en $\mathfrak{B}$. En tal caso, $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \overset{\sim}{\prec} \langle \mathfrak{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ en $\mathrm{L} \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$, siendo $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_k \rangle_{k<\beta}$ una enumeración de $\dot{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ es la sucesión de las imágenes de los elementos de $\dot{\mathbf{a}}$; decir, $\bar{\mathbf{b}} = \langle \mathbf{f}(\mathbf{a}_k) \rangle_{k<\beta}$.

Demostración

Se sigue de IV.3.4, IV.6.1, I.3.5.2 y de la definición de isomorfismo. ■

6.4. Teorema

Sean $\mathscr{A}$ y $\mathfrak{B}$ sistemas similares y de la misma cardinalidad y sea $\dot{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_k \rangle_{k<\beta}$ una enumeración de $\mathbf{A}$. Entonces

1) Si $\mathscr{A} \cong \mathfrak{B}$, hay una secuencia $\bar{\mathbf{b}} = \langle \mathbf{b}_k \rangle_{k<\beta}$ tal que $\langle \mathscr{A}, \dot{\mathbf{a}} \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$.

2) Si $\bar{\mathbf{b}}$ es una enumeración de $\mathbf{B}$ y $\langle \mathscr{A}, \dot{\mathbf{a}} \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ entonces $\mathscr{A} \cong \mathfrak{B}$.

3) Si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ entonces $\mathscr{A} \prec \mathfrak{B}$ syss $\langle \mathscr{A}, \dot{\mathbf{a}} \rangle \equiv \langle \mathfrak{B}, \dot{\mathbf{a}} \rangle$.

Demostración

Hacedlo vosotros, es el Problema 8. ■

6.5. Definición

Sea $\mathscr{A}$ un sistema, $L(\mathscr{A})$ su lenguaje y $\bar{\mathbf{a}}$ una enumeración completa de $\mathbf{A}$.

Llamaremos diagrama completo de $\mathscr{A}$ al conjunto de las sentencias de $L(\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle)$ que son verdaderas en $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$. Es decir, a la teoría del sistema extendido: $\mathrm{TEO}(\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle)$.

Llamaremos diagrama abierto de $\mathscr{A}$ al conjunto de las sentencias atómicas de $L(\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle)$ y las negaciones de sentencias atómicas verdaderas en $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$. Representemos a dicho conjunto así: $\mathrm{DIAG}(\mathscr{A})$.

6.6. Teorema

Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ sistemas similares.

$\mathscr{A} \overset{\mathbf{h}}{\Box} \mathscr{B}$ syss $\langle \mathscr{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ es modelo de $\mathrm{DIAG}(\mathscr{A})$, siendo $\bar{\mathbf{b}} = \langle \mathbf{b}_k \rangle_{k<\beta}$ y $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_k \rangle_{k<\beta}$, $\bar{\mathbf{a}}$ es una enumeración de $\mathbf{A}$.

Demostración

$[\Rightarrow]$ Sea $\mathscr{A} \overset{\mathbf{h}}{\Box} \mathscr{B}$ y sea $\mathbf{h}$ la inmersión de $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$. Por II.5.3, ejercicio 2) sabemos que para cada asignación $\mathscr{I}: \mathscr{V} \to \mathbf{A}$ se cumple:

a) $\mathbf{h}(\mathscr{A}\mathscr{I}(\tau)) = \mathscr{B}(\mathbf{h} \circ \mathscr{I})(\tau)$.

b) $\mathscr{A}\mathscr{I}$ sat φ syss $\mathscr{B}(\mathbf{h} \circ \mathscr{I})$ sat φ, para cada φ sin cuantificadores.

Sea $\psi \in \mathrm{DIAG}(\mathscr{A})$. Es decir, $\psi = R_j \tau_1 \dots \tau_{\delta(j)}$ 0 $\psi = \neg R_j \tau_1 \dots \tau_{\delta(j)}$ con todos los términos cerrados, $\psi \in \mathrm{SEN}(L(\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle))$. $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ es modelo de ψ, siendo $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_k \rangle_{k<\beta}$ una enumeración completa de $\mathbf{A}$ y $L(\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle) = L \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$.

1.^{er} caso. $\psi = R_j \tau_1 \dots \tau_{\delta(j)}$. Supongamos que en ψ están las constantes nuevas c_{i_1}, $\dots, c_{i_n}$ y sea $\psi' = R_j t_1 \dots t_{\delta(j)}$ tal que $\mathrm{S}^{c_{i_1} \dots c_{i_n}}_{y_1 \dots y_n} R_j t_1 \dots t_{\delta(j)} = R_j \tau_1 \dots \tau_{\delta(j)}$ con $y_1, \dots, y_n$ nuevas.

Evidentemente, $\psi' \in \mathrm{FOR}(L(\mathscr{A}))$.

Sea $\mathscr{I}: \mathscr{V} \to \mathbf{A}$ una asignación tal que $\mathscr{I}(y_S) = \mathbf{a}_{i_S}$ para cada $S \in \{1, \dots, n\}$.

Es fácil comprobar que

$$\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle\ \mathscr{I} \text{ sat } \psi \text{ syss } \mathscr{A}\mathscr{I} \text{ sat } \psi'$$

utilizando II.4.2 y el ejercicio 5) de II.5.3.

Puesto que partimos de que $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ es modelo de ψ, también $\mathscr{A}\mathscr{I}$ sat ψ'. Y puesto que $\mathscr{A} \overset{\mathbf{h}}{\Box} \mathscr{B}$, $\mathscr{B}(\mathbf{h} \circ \mathscr{I})$ sat ψ'.

Sea $\bar{\mathbf{b}} = \langle \mathbf{h}(\mathbf{a}_k) \rangle_{k<\beta}$. Evidentemente, $\langle \mathscr{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ es modelo de ψ.

$[\Leftarrow]$ Sea $\langle \mathscr{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ modelo de $\mathrm{DIAG}(\mathscr{A})$.

Para cada sentencia ψ atómica, o negación de ella, de $L(\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle)$ se cumplirá:

$$\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \text{ sat } \psi \text{ syss } \langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle \text{ sat } \psi.$$

[$\Leftarrow$] Definamos $\mathbf{h}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ de forma que $\mathbf{h}(\mathbf{a}_k) = \mathbf{b}_k$.
Es fácil comprobar que $\mathbf{h}$ es inmersión de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Hacedlo vosotros. ■

6.7. Teorema

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ sistemas similares.
$\mathcal{A} \overset{\mathbf{h}}{<} \mathcal{B}$ syss $\langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ es modelo de TEO($\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$), siendo $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_k \rangle_{k<\beta}$ una enumeración completa de $\mathbf{A}$ y $\bar{\mathbf{b}} = \langle \mathbf{b}_k \rangle_{k<\beta}$.

Demostración

Hacedlo vosotros, es el Problema 9. ■

6.8. *Ejercicios*

1) Completad la prueba de 6.2.

2) Completad la demostración de 6.3.

3) Completad la demostración de 6.7.

Problema 8

Demostrad el teorema 6.4.

Problema 9

Demostrad el teorema 6.7.

Problema 10

Demostrad que si $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ entonces $\mathcal{A}' < \mathcal{B}'$ siendo $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ reducciones respectivas de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que tienen ambas el mismo tipo.

Capítulo V

EL TEOREMA DE COMPACIDAD Y SUS IMPLICACIONES MATEMATICAS

INTRODUCCION

El teorema de compacidad es también conocido como teorema de finitud. De todas formas, es más frecuente y también más acertado el primer nombre, pues lo que este teorema afirma es que un cierto espacio topológico es compacto.

En este capítulo vuelvo a demostrar compacidad. El motivo es que así podremos desvincular los resultados que obtengamos usando este teorema del teorema de completud, y por consiguiente, del cálculo deductivo. En cualquier caso, lo más interesante de este capítulo son las consecuencias matemáticas del teorema de compacidad.

El planteamiento que he seguido aquí es el habitual en teoría de modelos, en donde muchas de las cuestiones planteadas tienen la forma siguiente: ¿Posee una estructura matemática dada una determinada propiedad? En este capítulo, la propiedad que mayormente nos ocupará es la más general y, por así decir, lingüística de todas: la de ser expresable en el lenguaje de primer orden. A las estructuras matemáticas, que como sabeis, son clases de sistemas, las llamaremos axiomatizables, si pueden ser expresadas en primer orden. Esto quiere decir que tiene que haber un conjunto de sentencias de primer orden cuyos modelos sean justamente los que integran la estructura matemática en estudio. Por supuesto, si esta estructura pudiera ser expresada mediante un conjunto finito de sentencias, diríamos que es finitamente axiomatizable.

En este capítulo veremos algunos ejemplos de estructuras axiomatizables y otros de estructuras no axiomatizables. De entre los primeros algunos lo serán de estructuras finitamente axiomatizables. O sea, cuando $\mathcal{K}$ es una clase de sistemas decimos que es axiomatizable si hay un cierto conjunto Δ de sentencias tal que $MOD(\Delta) = \mathcal{K}$. En esta misma circunstancia decimos que Δ axiomatiza $\mathcal{K}$ o también que Δ es completo respecto de $\mathcal{K}$.

También plantearemos aquí la axiomatizabilidad de teorías de sistemas concretos, tales como TEO($\mathcal{N}$) o TEO($\mathcal{R}$). El que la teoría de un sistema $\mathcal{A}$ sea axiomatizable significa que TEO($\mathcal{A}$) = CON(Δ), para un cierto conjunto Δ de sentencias decidible. Para demostrarlo se puede probar que CON(Δ) es una teoría completa. En este capítulo no hemos desarrollado el instrumental necesario para probar que una teoría es completa.

Lo que sí podemos demostrar a estas alturas es que, por mucho que nos esforcemos, en primer orden no podemos caracterizar completamente ni a los naturales ni a los reales; es decir, tanto TEO($\mathcal{N}$) como TEO($\mathcal{R}$) tienen modelos no isomorfos. Los naturales resultan tener una esencia sublime —¿de orden superior?— y resbaladiza. Con nuestro pobre lenguaje de primer orden no podemos atraparlos, necesitamos un lenguaje de orden superior, como mínimo de segundo orden.

Por descontado, no se puede encontrar un conjunto de axiomas que se cumplan únicamente en el sistema $\mathcal{N}$. Bueno, esto sería una exigencia excesiva, en matemáticas nos basta con poder caracterizar hasta isomorfía; es decir, con poder ofrecer unos axiomas que sean verdad en $\mathcal{N}$ y en todos los sistemas isomorfos a $\mathcal{N}$, pero solo en ellos. En este capítulo veremos que esto es imposible.

No hay que desanimarse, nos decimos, tal vez podamos encontrar unos axiomas que se cumplan en $\mathcal{N}$ y que caractericen a este sistema de forma que cualquier otro modelo suyo sea elementalmente equivalente a $\mathcal{N}$. Al fin y al cabo, lo justificamos, la isomorfía es una propiedad muy fuerte y para establecerla no nos basta el lenguaje de primer orden que utilizamos para hablar de los sistemas.

Así que, nuestro objetivo es caracterizar afinando hasta equivalencia elemental. En el capítulo VII veremos que esto equivale a preguntarse si es completa la teoría generada por los axiomas. Desgraciadamente, tampoco lo es (Teorema de incompletud de Gödel).

Demostraremos también en este capítulo que las inmersiones elementales son amalgamables y que las teorías que admiten eliminación de cuantificadores dan origen a una clase $\mathcal{K}$, formada por sus subsistemas, que es amalgamable.

El último apartado de este capítulo lo dedico a la construcción de sistemas mediante ultraproductos. Es éste un procedimiento algebraico que nos permitirá demostrar el teorema de Loś utilizando el concepto booleano de filtro maximal. Recurriendo al Lema de Zorn, a partir de este teorema, demostramos el de compacidad. He añadido un apéndice en donde demuestro los teoremas sobre filtros relevantes para nuestra prueba; especialmente, el teorema del ultrafiltro.

1. AXIOMATIZABILIDAD

El adjetivo axiomatizable lo veréis aplicado a propiedades, clases de sistemas y teorías. A continuación defino qué significa en cada uno de estos casos.

1.1. Propiedad axiomatizable

En este contexto, una propiedad es un enunciado, hecho en metalenguaje, acerca de los sistemas de un cierto tipo.

Sea $\mathscr{P}$ una propiedad de los sistemas de un cierto tipo $\langle \mu, \delta \rangle$.

1.1.1. *Definición*

$\mathscr{P}$ es una propiedad axiomatizable syss hay un lenguaje L de tipo $\langle \mu, \delta \rangle$ y un conjunto $\Sigma \subseteq$ SEN(L) tal que $\mathscr{A} \in$ MOD(Σ) syss $\mathscr{A}$ tiene la propiedad $\mathscr{P}$, para cada sistema $\mathscr{A}$ adecuado a L. □

1.1.2. *Definición*

$\mathscr{P}$ es una propiedad finitamente axiomatizable syss $\mathscr{P}$ es axiomatizable y el conjunto Σ de sus axiomas es finito. □

NOTA

A las propiedades finitamente axiomatizables se las llama también propiedades de primer orden y a las axiomatizables, propiedades generales de primer orden.

Para demostrar que una propiedad es axiomatizable basta con presentar el conjunto de los axiomas que la expresan. Sin embargo, para demostrar que no es axiomatizable hace falta dar razones convincentes de que la dificultad de encontrar los axiomas no se debe a nuestra falta de imaginación, sino que realmente no los puede haber. En estos casos, solemos utilizar consecuencias del teorema de compacidad. Es éste el motivo por el que he incluido la axiomatizabilidad en este capítulo.

Naturalmente, toda propiedad finitamente axiomatizable es también axiomatizable. Pero, cuando es axiomatizable, ¿cómo demostrar, en los casos oportunos, que no puede serlo finitamente? Como veréis, en esta situación nos valemos de algunas de las consecuencias del teorema de compacidad.

Ejemplos

1) La propiedad de ser infinito es axiomatizable. En efecto, sea $\Sigma = \{\varphi_n / n > 1\}$. Donde los φ_n expresan que hay al menos n elementos; es decir, la conocida sentencia $\exists y_1 \ldots y_n \bigwedge_{i \neq j} y_i \neq y_j$ —$i, j \in \{1, \ldots, n\}$—.

Veremos que, sin embargo, no es finitamente axiomatizable y que la propiedad de ser finito no es axiomatizable, ni tan siquiera tomando un conjunto infinito de axiomas.

En esto la lógica de segundo orden es mucho más potente que la de primer orden ya que la finitud y la infinitud son expresables en ella.

2) La propiedad de tener n elementos (siendo n un número natural mayor que 0) es finitamente axiomatizable. Como podeis suponer, el axioma es $\varphi_n \wedge \psi_n$ en el caso en que $n > 1$ y será $\forall xy\ x = y$ cuando $n = 1$. (Ver II.3.1).

NOTA 1

En el ejercicio 4) de II.3.3.1 vimos que no había modelos finitos de una cierta teoría, la de los órdenes densos. Sus axiomas no constituyen, sin embargo, una axiomatización de la propiedad de infinitud, pues aunque es cierto que cualquier modelo de ellos ha de ser necesariamente infinito, no todo sistema infinito es un orden denso. Y esto no depende del tipo del sistema, ni tan siquiera de que tenga destacado una relación de orden, pues $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ es infinito y su orden no es denso.

Tampoco axiomatiza la infinitud el conjunto de los axiomas α_1, α_2 y α_3 de la aritmética (II.3.4) pues, pese a no tener modelos finitos, no todo sistema infinito es modelo de $\{\alpha, \alpha_2, \alpha_3\}$. Los sistemas $\langle \mathbb{N}, 0, \mathbf{I} \rangle$ —donde I es la identidad— y $\langle \mathbb{N}, 0, \mathbf{f}_0 \rangle$ donde $\mathbf{f}_0$— es la función constante de valor 0— son tan infinitos como $\langle \mathbb{N}, 0, \mathbf{S} \rangle$ pese a que en los primeros las funciones destacadas no son biyecciones de $\mathbb{N}$ en algún subconjunto propio de $\mathbb{N}$. Evidentemente, puesto que $\mathbb{N}$ es infinito, existe en el universo matemático (en la jerarquía de conjuntos) una bifunción de $\mathbb{N}$ en un subconjunto propio suyo, pero en el lenguaje de primer orden no puedo decirlo y justamente por ese motivo la propiedad de ser infinito no es axiomatizable en primer orden. Sin embargo, en segundo orden como puedo cuantificar sobre conjuntos, relaciones y funciones puedo decir:

$$\exists f(\forall x\, fx \neq c \wedge \forall xy\, (fx = fy \rightarrow x = y) \wedge \forall y\, (y \neq c \rightarrow \exists z\, fz = y))$$

—siendo f una variable funcional—.

En realidad, no necesitaría *ni* tan siquiera contar con la constante individual c y bastaría con poder cuantificar sobre relaciones. En el problema 1 daréis con una fórmula de segundo orden equivalente a la anterior, escrita en un lenguaje sin constantes individuales y cuantificando sobre relaciones.

¿Por qué en un sistema de segundo orden tiene que haber una función de estas características siempre y cuando sea infinito?

Los sistemas de segundo orden tienen un universo para cada tipo de variable; en particular, si $\mathbf{A}$ es el universo de las variables individuales, $\mathcal{P}\mathbf{A}$ lo será de las predicativas monarias, $\mathcal{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{A})$ de las binarias, etc. Es decir, con nuestras variables hacemos referencia a todas las relaciones posibles, no teniendo que estar ninguna de ellas particularmente destacada en el sistema.

NOTA 2

Hay propiedades, como la de ser finito o infinito que no dependen del tipo del sistema. Por consiguiente, si queremos establecer su axiomatizabilidad, deberíamos

probarlo para todos los sistemas del tipo que fuera, mientras que la no axiomatizabilidad debería probarse para un tipo arbitrario.

Sin embargo, en el primer caso nos basta con demostrarlo para los sistemas de tipo $\langle\varnothing; \varnothing\rangle$. ¿Por qué?

1.2. Clase de sistemas axiomatizable

A veces también se dice que las propiedades de ser grupo, anillo o cuerpo son axiomatizables, o que la estructura de grupo es axiomatizable. Yo prefiero decir que la clase de los grupos, anillos o cuerpos es axiomatizable. Es éste el motivo por el que defino a continuación qué queremos decir al afirmar que una clase de sistemas es axiomatizable.

En lo que sigue, siempre que hablemos de una clase de sistemas $\mathcal{K}$, sus elementos serán todos del mismo tipo. Para cada tipo $\langle\mu, \delta\rangle$, $\mathcal{M}_{\langle\mu,\delta\rangle}$ denotará la clase de todos los sistemas de dicho tipo.

1.2.1. *Definición*

Sea $\langle\mu, \delta\rangle$ un tipo y $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}_{\langle\mu,\delta\rangle}$. $\mathcal{K}$ es axiomatizable syss la propiedad de ser elemento de $\mathcal{K}$ es axiomatizable; es decir,

$$\mathcal{K} = \mathrm{MOD}(\Sigma) \text{ para un cierto } \Sigma \subseteq \mathrm{SEN}(\mathrm{L}_{\langle\mu,\delta\rangle}). \ \square$$

1.2.2. *Definición*

$\mathcal{K}$ es finitamente axiomatizable syss $\mathcal{K} = \mathrm{MOD}(\alpha)$ para una cierta $\alpha \in \mathrm{SEN}(\mathrm{L})$. $\square$

NOTA

En ocasiones, en vez de decir que una clase de sistemas $\mathcal{K}$ es axiomatizable, diremos que es Δ-elemental y escribiremos $\mathcal{K} \in \mathrm{EC}_\Delta$. Paralelamente, en vez de decir que $\mathcal{K}$ es finitamente axiomatizable diremos que es elemental y escribiremos $\mathcal{K} \in \mathrm{EC}$.

Ejemplos

1) Sea $[\mathrm{Grup}]_{\langle 0,2,\varnothing\rangle} \subseteq \mathcal{M}_{\langle 0,2,\varnothing\rangle}$ la clase de los grupos y sean e y $+$ los signos peculiares de $L_{\langle 0,2,\varnothing\rangle}$. $[\mathrm{Grup}]$ es finitamente axiomatizable ya que $[\mathrm{Grup}] = \mathrm{MOD}(\alpha_G)$ siendo $\alpha_G = \forall xyz\, x + (y + z) = (x + y) + z \wedge \forall x\, x + e = e + x = x \wedge \forall x \exists y\, x + y = e$. Es decir, α_G es la conyunción de los axiomas de asociatividad, elemento neutro y existencia de simétrico. (Recordad II.3.2).

2) Sea [Grup Com]$_{(0,2;\emptyset)} \subseteq \mathcal{M}_{(0,2;\emptyset)}$ la clase de los grupos conmutativos. [Grup Com] es finitamente axiomatizable pues [Grup Com] = MOD(α_{GC}), siendo

$$\alpha_{GC} \equiv \alpha_G \wedge \forall xy\ x + y = y + x.$$

Evidentemente, MOD(α_{GC}) $\subseteq$ MOD(α_G). (¿Por qué?).

3) Sea [Anill]$_{(0,2,2;\emptyset)} \subseteq \mathcal{M}_{(0,2,2;\emptyset)}$ la clase de los anillos y sean e, $+$ y $\cdot$ los signos peculiares de L$_{(0,2,2;\emptyset)}$ [Anill] es finitamente axiomatizable, pues, [Anill] = MOD(α_A), siendo

$$\alpha_A \equiv \alpha_{GC} \wedge$$

$$\forall xyz\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \wedge \forall xyz\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \wedge$$
$$\forall xyz\ (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

4) Sea [Anill Com]$_{(0,2,2;\emptyset)} \subseteq \mathcal{M}_{(0,2,2;\emptyset)}$ la clase de los anillos conmutativos. [Anill Com] es también finitamente axiomatizable. (Obvio).

5) Sea [Cuerp]$_{(0,0,2,2;\emptyset)} \subseteq \mathcal{M}_{(0,0,2,2;\emptyset)}$ la clase de los cuerpos y sean e, u, $+$ y $\cdot$ los signos peculiares de L$_{(0,0,2,2;\emptyset)}$. Dicha clase, [Cuerp] es axiomatizable mediante el axioma α_C que es la conyunción de los axiomas siguientes:

$\alpha_{AC} \equiv$ (el axioma de los anillos conmutativos)

$\alpha_U\ \equiv \forall x\ \ u \cdot x = x \cdot u = x$ (elemento unidad)

$\alpha_D\ \equiv \forall xy\ (x \cdot y = e \rightarrow x = e \vee y = e)$ (sin divisores de cero)

$\alpha_4\ \equiv e \neq u$ (el elemento neutro y la unidad son distintos)

$\alpha_5\ \equiv \forall x\ (x \neq e \rightarrow \exists y\ y \cdot x = u)$ (existencia de inverso).

6) Sea [Cuerp Carac p]$_{(0,0,2,2;\emptyset)} \subseteq \mathcal{M}_{(0,0,2,2;\emptyset)}$ la clase de los cuerpos de característica p (con p primo y mayor que 0). Esta clase es axiomatizable ya que [Cuerp. Carc. p] = MOD(α_{CC_p}) siendo

$$\alpha_{CC_p} \equiv \alpha_C \wedge u + \ldots^{p} + u = e.$$

Se dice que un cuerpo tiene característica p cuando p es el menor número entero tal que $\forall \mathbf{x}\ p \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}$ (siendo $p \cdot \mathbf{x}$ una abreviatura de $\mathbf{x} + \ldots^{p} + \mathbf{x}$). Se puede demostrar que si un cuerpo tiene característica p, dicho p es primo y que la condición $\forall \mathbf{x}\ p \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}$ equivale a $\mathbf{u} + \ldots^{p} + \mathbf{u} = \mathbf{e}$.

7) Sea [Cuerp. Carac. 0]$_{(0,0,2,2;\emptyset)} \subseteq \mathcal{M}_{(0,0,2,2;\emptyset)}$ la clase de los cuerpos de característica 0. Dicha clase [Cuerp. Carac. 0] es axiomatizable, pero no finitamente. Es evidente que es axiomatizable pues [Cuerp. Carc. 0] = MOD(Δ), siendo

$$\Delta = \{\alpha_C\} \cup \{u + u \neq e, u + u + u \neq e, u + \overset{p}{\ldots} + u \neq e, \ldots\}.$$

Estos axiomas expresan que la característica no es p, para cada número primo. Para demostrar que no es finitamente axiomatizable utilizaremos, en este mismo capítulo, algunas de las consecuencias del teorema de compacidad.

8) Sea $[\text{Ord. Par.}]_{\langle\leq\rangle} \subseteq \mathcal{M}_{\langle\leq\rangle}$ la clase de los órdenes parciales y sea $\leq$ el signo peculiar de $L_{\langle\leq\rangle}$. Esta clase [Ord.Par.] es finitamente axiomatizable. En efecto, [Ord.Par.] = MOD(β_{OP}) siendo:

$$\beta_{OP} = \forall x\, x \leq x \wedge \forall xy\, (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y) \wedge \forall xyz\, (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$$

(Recordad I.2.3 y II.3.3).

9) Sea $[\text{Ord.Lin.}]_{\langle\leq\rangle} \subseteq \mathcal{M}_{\langle\leq\rangle}$ la clase de los órdenes lineales. [Ord. Lin.] = MOD(β_{OL}) siendo

$$\beta_{OL} = \beta_{OP} \wedge \forall xy\, (x \leq y \vee y \leq x).$$

10) Sea $[\text{Buen Ord.}]_{\langle\leq\rangle} \subseteq \mathcal{M}_{\langle\leq\rangle}$ la clase de los buenos órdenes. Esta clase no es axiomatizable. (Recordad I.2.4).

1.3. Teoría axiomatizable

Hemos dicho que una teoría es un conjunto de sentencias cerrado por deducibilidad. Decimos que una teoría es axiomatizable cuando se puede presentar un conjunto decidible de axiomas a partir de los que se deduzcan todas las sentencias de la teoría. Pedimos que el conjunto de axiomas sea decidible porque en otro caso la axiomatizabilidad sería una propiedad trivial de toda teoría, ya que si T es una teoría, T = CON(T) y por tanto, T sería el conjunto axiomas.

Pero ¿qué se entiende por «conjunto decidible»? Decimos que Δ es decidible si existe un procedimiento efectivo que dada una sentencia nos diga si $\varphi \in \Delta$ o no.

La pregunta ahora será ¿qué se entiende por «procedimiento efectivo? Voy a dar la noción intuitiva de este concepto, una definición precisa requeriría teoría de la recursión.

Un procedimiento *efectivo* debe cumplir las siguientes condiciones:

a) Deben existir instrucciones exactas, de longitud finita, que expliquen cómo llevar a término el procedimiento. Estas instrucciones no deben requerir astucia ninguna por parte del ejecutante. La idea es que una máquina tonta pueda realizarlo siguiendo las instrucciones.

b) El procedimiento debe evitar los métodos de azar. Es decir, ninguna de las instrucciones nos pedirá hacer cosas tales como lanzar una moneda al aire y actuar conforme al resultado.

c) Cuando se trata de un procedimiento de decisión para un conjunto de sentencias, al procedimiento debe proporcionar la respuesta sí o no, en un número finito de pasos, para cada una de las sentencias del lenguaje.

1.3.1. *Definición*

Una teoría T es axiomatizable syss existe un conjunto decidible de sentencias Σ tal que $T = CON(\Sigma)$. □

1.3.2. *Definición*

Una teoría T es finitamente axiomatizable syss T es axiomatizable y el conjunto de sus axiomas es finito. □

En este último caso tendremos $T = CONS(\{\alpha\})$, abreviadamente $T = CON(\alpha)$, siendo α la conyunción de los axiomas.

¿Cómo demostramos que una teoría es axiomatizable? A diferencia de lo que sucedía en el caso de la demostración de que una propiedad es axiomatizable, demostrar que una teoría lo es no es siempre cuestión fácil ni es ni mucho menos evidente que dados una serie de axiomas ellos sean capaces de generar todas las sentencias de la teoría. Estoy pensando concretamente en las teorías definidas semánticamente; como por ejemplo $TEO(\mathscr{A})$, siendo $\mathscr{A}$ un sistema.

Imaginad que queremos demostrar que la teoría de un sistema es axiomatizable y proponemos un conjunto de axiomas Σ. Para ver que $TEO(\mathscr{A}) = CON(\Sigma)$ habremos de demostrar que $CON(\Sigma) \subseteq TEO(\mathscr{A})$ y que $TEO(\mathscr{A}) \subseteq CON(\Sigma)$. Lo primero suele resultar fácil pues bastaría con demostrar que cada una de las sentencias de Σ es verdadera en $\mathscr{A}$. Demostrar lo segundo no resulta tan fácil. Un procedimiento que se suele seguir es demostrar que $CON(\Sigma)$ es una teoría completa.

La razón es la siguiente: si sabemos que $CON(\Sigma)$ es completa y hubiera una sentencia $\varphi \in TEO(\mathscr{A})$ que no estuviera en $CON(\Sigma)$, su negación sí que estaría, y puesto que $CON(\Sigma) \subseteq TEO(\mathscr{A})$: $\neg\varphi \in TEO(\mathscr{A})$. Y esto es imposible: un mismo sistema no puede ser modelo de una sentencia y de su negación.

Como en este capítulo no contamos aún con procedimientos eficaces para demostrar que una teoría es completa, esperaremos hasta el capítulo VII para demostrar que ciertas teorías son axiomatizables.

Ejemplos

1) La teoría de grupos es finitamente axiomatizable pues si $\mathscr{K}$ es la clase de los grupos, $TEO(\mathscr{K}) = CON(\alpha_G)$. De la misma manera, la teoría de los grupos conmutativos, anillos, cuerpos, etc., del apartado anterior son todas axiomatizables.

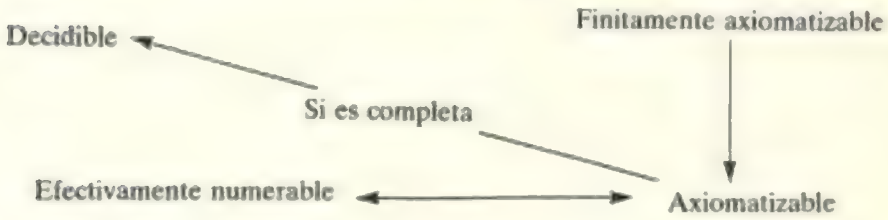
2) La teoría de los reales es axiomatizable. Sea $\mathscr{R} = \langle\, , 0, 1, +, \cdot\rangle$ el álgebra de los reales y sea $TEO(\mathscr{R})$ su teoría. Pues bien, se puede demostrar que $TEO(\mathscr{R}) = CON(\Sigma)$ siendo Σ un conjunto infinito de axiomas que expresan las características de $\mathscr{R}$. En realidad, hay varias axiomatizaciones posibles, algunas de las cuales fueron propuestas por Tarski en los años 30. De hecho, él fue el primero que demostró que la teoría del álgebra elemental de los reales, es axiomatizable y decidible, aunque, como la propia aritmética, tampoco sea categórica.

Sobre todos estos asuntos volveremos a tratar en los capítulos siguientes. De momento, sólo podemos demostrar la existencia de modelos no estándar, y para TEO($\mathcal{N}$) lo haremos en el apartado 3 de este mismo capítulo. El estudio de los modelos no estándar de TEO($\mathcal{R}$), el denominado Análisis no estándar, merecería capítulo aparte.

3) La teoría del sistema $\mathcal{N}_S = \langle \mathbb{N}, 0, S \rangle$ es axiomatizable y decidible. Sus axiomas fueron presentados en el apartado 3.4 del capítulo II. Para demostrar que aquellos axiomas axiomatizan de hecho la TEO($\mathcal{N}_S$) se pueden realizar varias pruebas. Concretamente, se puede demostrar que la teoría es decidible y de allí inferir que es axiomatizable.

Aunque no lo demostremos en este libro, conviene tener presente cuál es la relación entre los conceptos de axiomatizabilidad, decidibilidad y completud. Concretamente; dada una teoría, la relación entre ellos es la señalada en el siguiente esquema, sacado del libro de Enderton: *A Mathematical Introduction to Logic*.

Relación entre propiedades de una teoría



NOTA

Decimos que un conjunto es efectivamente enumerable syss hay un procedimiento efectivo que lista, en un cierto orden, los elementos de conjunto.

1.4. *Ejercicios*

1) Sea $[\text{Equiv.}]_{\langle \emptyset, 2\rangle} \subseteq \mathcal{M}_{\langle \emptyset, 2\rangle}$ la clase formada por los sistemas $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ tales que $\mathbf{R}$ es una relación de equivalencia cuyo dominio es $\mathbf{A}$ y sea $L_{\langle \emptyset, 2\rangle}$ el lenguaje adecuado con R como signo peculiar. ¿Es [Equiv.] axiomatizable, finitamente axiomatizable, tal vez?

2) Sea $[\text{Ord. Acot.}]_{\langle \emptyset, 2\rangle} \subseteq \mathcal{M}_{\langle \emptyset, 2\rangle}$ la clase formada por los órdenes lineales con extremo superior. ¿Es [Ord. Acot.] axiomatizable?

3) Sea $[\text{Ord. Dis. Acot.}]_{\langle \emptyset, 2\rangle} \subsetneq \mathcal{M}_{\langle \emptyset, 2\rangle}$ la clase formada por los órdenes lineales con extremo superior y tales que cualquiera de sus elementos que tenga elementos

menores que él, tiene un predecesor inmediato. ¿Es [Ord. Dis. Acot.] axiomatizable? ¿Finitamente?

4) Sea [Alg. Boole]$_{\langle 0,0,1,2,2\rangle} \subseteq \mathcal{M}_{\langle 0,0,1,2,2\rangle}$ la clase formada por las álgebras de Boole y sea $L_{\langle 0,0,1,2,2\rangle}$ el lenguaje apropiado con $c_0 c_1, f_1, f_2, f_3$ como signos peculiares. ¿Es [Alg. Boole] axiomatizable, finitamente?

5) Contestad a la pregunta del ejemplo 2) de 1.2.

6) Contestad al interrogante de la Nota 2 de 1.1.

7) Sea [Alg. Boole *sin* átomos]$_{\langle 0,0,1,2,2\rangle} \subseteq \mathcal{M}_{\langle 0,0,1,2,2\rangle}$ la clase de las álgebras de Boole sin átomos y sea L el lenguaje adecuado para hablar de ellas. ¿Es axiomatizable?

8) Sea [Cuerp. Alg. cerr.] la clase de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica p. ¿Es [Cuerp. Alg. cerr.] axiomatizable?

Problema 1

Buscad una fórmula de segundo orden que equivalga a la propuesta en la Nota 1 de 1.1, en el lenguaje que allí se plantea.

Problema 2

Sean $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}_{\langle\mu,\delta\rangle}$ y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}_{\langle\mu,\delta\rangle}$. Y supongamos que $\mathcal{K}$ es finitamente axiomatizable.

i) Demostrad que $\mathcal{K} \cap \mathcal{H}$ es axiomatizable, si $\mathcal{H}$ es axiomatizable.

ii) ¿Podría ser $\mathcal{K} \cap \mathcal{H}$ finitamente axiomatizable y $\mathcal{H}$ axiomatizable sin serlo finitamente?

2. COMPACIDAD. (EL METODO DE LOS DIAGRAMAS)

El teorema de compacidad fue demostrado por Gödel en 1930, como consecuencia del teorema de completud, para lenguajes con un conjunto numerable de signos peculiares. Fue posteriormente ampliado a lenguajes cualesquiera por Malcev, Henkin y A. Robinson.

Como sabeis, dicho teorema afirma que un conjunto Δ de sentencias tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito suyo lo tiene.

Sin embargo, aunque este teorema sea semántico y no requiera la noción de deducibilidad, en la prueba que hicimos de él en el capítulo III lo obtuvimos a partir del de completud y, por tanto, involucramos al cálculo deductivo. Es importante

contar con una prueba independiente del de completud, porque en una parte considerable de la teoría de modelos el teorema de compacidad es básico, pero el de completud no. Por consiguiente, nos interesa distinguir claramente las pruebas y consecuencias de uno y otro.

En este apartado utilizaremos el método de los diagramas para construir el modelo del conjunto de sentencias cuyos subconjuntos finitos tienen todos algún modelo. De esta forma practicaremos un poco con este método, en el que los modelos se construyen a partir de constantes. El procedimiento os resultará conocido, pues, en lo que atañe a la construcción del modelo, coincide con la que hicimos para demostrar el teorema de Henkin. La diferencia estará en que en este capítulo nosotros no partiremos de un conjunto consistente para pasar a uno máximamente consistente y, sobre él, hacer su calco semántico. Nuestro conjunto de sentencias de partida será un conjunto finitamente satisfacible; es decir, un conjunto tal que todo subconjunto finito suyo tiene un modelo.

Demostraremos en primer lugar que un conjunto de sentencias es el diagrama completo de algún sistema cuando, y sólo entonces, cumpla ciertas condiciones. Entre dichas condiciones se encuentra la de satisfacibilidad finita. Sobre el conjunto de sentencias inicial, por ampliaciones sucesivas, en un nuevo lenguaje, también ampliado, construiremos un gran conjunto de sentencias del que se puede extraer una teoría que resulta ser el diagrama completo de un modelo de nuestro conjunto inicial.

He aprovechado la ocasión de volver a demostrar compacidad y lo he hecho para lenguajes de cualquier cardinalidad. Para ello he utilizado el Teorema del buen Orden, equivalente, como se sabe, al Axioma de elección. Interesa también recordar esta otra consecuencia del Axioma de elección: «Si k es un cardinal infinito, entonces $k = k \cdot k = k \cdot \aleph_0$», que nos permite demostrar que la cardinalidad de SEN(L) es k cuando tenemos k signos peculiares en L.

En efecto, utilizando el lema anterior, se puede demostrar fácilmente lo siguiente:

«Si L es un lenguaje de primer orden de cardinalidad k, con k infinito, entonces SEN(L) tiene cardinalidad k».

2.1. Lema

Sea $\overline{\mathbf{m}} = \langle \mathbf{m}_k \rangle_{k<\beta}$ una enumeración completa y sin repeticiones de M, un conjunto no vacío, L un lenguaje de primer orden y $\Gamma \subseteq \mathrm{SEN}(\mathrm{L} \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta})$, siendo $\mathrm{L} \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$ la extensión del lenguaje L obtenida al añadir a L una constante individual c_k para cada $\mathbf{m}_k \in \mathrm{M}$.

Γ es el diagrama completo de algún sistema $\mathscr{E}$ de universo M es decir, $\Gamma = \mathrm{TEO}(\langle \mathscr{E}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$ syss.

a) Cada subconjunto finito de Γ tiene un modelo.

b) Para cada sentencia φ de $\mathrm{L} \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$: o bien $\varphi \in \Gamma$ o bien $\neg\varphi \in \Gamma$.

c) Si $\exists x \varphi \in \Gamma$, entonces $\mathbf{S}_x^{c_k}\, \varphi \in \Gamma$ para un cierto $k < \beta$.

d) Si $i, j < \beta$ y $i \neq j$, entonces $\neg c_i = c_j \in \Gamma$.

Demostración

[$\Rightarrow$] Supongamos que $\Gamma = \mathrm{TEO}(\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$ para un cierto $\mathcal{C}$ de universo $\mathbf{M}$. Es fácil ver que se cumplen las condiciones a), b), c) y d).

En efecto,

a) $\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle$ es modelo de $\mathrm{TEO}(\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$ por definición de teoría de un sistema. Por consiguiente, cada subconjunto finito de $\Gamma = \mathrm{TEO}(\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$ tendrá un modelo.

b) Por la proposición IV.5.3 sabemos que $\mathrm{TEO}(\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$ es una teoría completa.

c) Si $\exists x\varphi \in \mathrm{TEO}(\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$ entonces $\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle$ es modelo de $\exists x\varphi$

entonces $\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle[\mathbf{m}_k]$ sat φ, para algún $\mathbf{m}_k \in \mathbf{M}$

entonces $\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle$ es modelo de $\mathbf{S}_x^{c_k}\,\varphi$

(pues $\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle\,(c_k) = \mathbf{m}_k$ y vale el teorema de sustitución)

entonces $\mathbf{S}_x^{c_k}\,\varphi \in \mathrm{TEO}(\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$

d) Para cada $i, j < \beta$.

$$c_i = c_j \in \mathrm{TEO}(\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle) \text{ syss } \langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle \text{ es modelo de } c_i = c_j$$
$$\text{syss } i = j$$

Por consiguiente, si $i \neq j$, entonces $c_i = c_j \notin \mathrm{TEO}(\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$ y al ser completa, $\neg c_i = c_j \in \mathrm{TEO}(\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que se cumplen las condiciones a), b), c) y d). Demostraremos que existe un sistema $\mathcal{C}$ tal que $\mathrm{DIAG}(\mathcal{C}) \subseteq \Gamma$. A partir de este hecho, por inducción sobre la longitud de las sentencias, se puede demostrar que para cada $\varphi \in \mathrm{SEN}(L \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$ se cumple: $\langle \mathcal{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle$ es modelo de φ syss $\varphi \in \Gamma$.

Para poder definir el sistema $\mathcal{C}$, demuestro lo siguiente.

2.1.1. *Proposición*

Para cada $i \in I$ y cada $c_{k_1}, \ldots, c_{k_{\mu(i)}}$ hay un único $p < \beta$ tal que c_p cumple:

$$f_i\, c_{k_1} \ldots c_{k_{\mu(i)}} = c_p \in \Gamma.$$

Esto se sigue de las condiciones a), b), c) y d).

En efecto, $\exists x\, f_i\, c_{k_1} \ldots c_{k_{\mu(i)}} = x$ es un teorema lógico, verdadero en todo sistema (corrección).

Si $\exists x\, f_i\, c_{k_1} \ldots c_{k_{\mu(i)}} = x \notin \Gamma$, por b), tendría que ser $\neg\exists x\, f_i\, c_{k_1} \ldots c_{k_{\mu(i)}} = x \in \Gamma$. Pero sabemos, por a), que cada subconjunto finito de Γ tiene un modelo, y si esta

sentencia estuviera en Γ, no podría ser cierto. Por la condición c) sabemos que $f_i c_{k_1} \dots c_{k_{\mu(i)}} = c_p \in \Gamma$, para un cierto c_p. La unicidad de este c_p se sigue de la condición d).

2.1.2. *Definición de $\mathscr{C}$*

Sea $\mathscr{C} = \langle \mathbf{M}, \langle \mathbf{f}_i \rangle_{i \in I}, \langle \mathbf{R}_j \rangle_{j \in J} \rangle$ donde:

i) Para cada $i \in I$: $k_1, \dots, k_{\mu(i)} < \beta$ se cumple que $\mathbf{f}_i(\mathbf{m}_{k_1}, \dots, \mathbf{m}_{k_{\mu(i)}}) = \mathbf{m}_p$. Siendo $\mathbf{m}_p$ el único elemento que cumple: $f_i c_{k_1} \dots c_{k_{\mu(i)}} = c_p \in \Gamma$.

ii) Para cada $j \in J$: $\mathbf{R}_j = \{ \langle \mathbf{m}_{k_1}, \dots, \mathbf{m}_{k_{\delta(j)}} \rangle / R_j c_{k_1} \dots c_{k_{\delta(j)}} \in \Gamma \}$.

Ahora veremos que el sistema así construido cumple los requisitos; es decir, $\mathrm{DIAG}(\mathscr{C}) \subseteq \Gamma$ y $\Gamma = \mathrm{TEO}(\langle \mathscr{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$.

2.1.3. *Proposición DIAG ($\mathscr{C}$) $\subseteq \Gamma$*

Sea $R_j \tau_1 \dots \tau_{\delta(j)} \in \mathrm{DIAG}(\mathscr{C})$.

Por un argumento inductivo, cuyo fuerte sería la proposición anterior, podemos demostrar que para cada término cerrado τ hay un único $\mathbf{m}_k \in \overline{\mathbf{m}}$ tal que $\tau = c_k \in \Gamma$.

Sean $c_{k_1} \dots c_{k_{\delta(j)}}$ las constantes tales que $\tau_1 = c_{k_1} \in \Gamma, \dots, \tau_{\delta(j)} = c_{k_{\delta(j)}} \in \Gamma$.

Es claro que $\langle \mathscr{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle$ es modelo de $R_j \tau_1 \dots \tau_{\delta(j)}$ syss $\langle \mathscr{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle$ es modelo de $R_j c_{k_1} \dots c_{k_{\delta(j)}}$, syss $R_j c_{k_1} \dots c_{k_{\delta(j)}} \in \Gamma$ y puesto que $R_j \tau_1 \dots \tau_{\delta(j)} \in \mathrm{DIAG}(\mathscr{C})$, tendremos que $R_j c_{k_{\delta(j)}} \in \Gamma$. También $R_j \tau_1 \dots \tau_{\delta(j)} \in \Gamma$ pues, en caso contrario, $\neg R_j \tau_1 \dots \tau_{\delta(j)} \in \Gamma$ y Γ no cumpliría la condición a).

2.1.4. *Proposición* $\Gamma = TEO(\langle \mathscr{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$

Sea φ una sentencia cualquiera de $L \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$. Por inducción sobre la longitud de las sentencias se puede demostrar que $\langle \mathscr{C}, \overline{\mathbf{m}} \rangle$ es modelo de φ syss $\varphi \in \Gamma$.

Esta demostración os la dejo como ejercicio. ■

2.2. Teorema de Compacidad

Sea Δ un conjunto de sentencias de L. Si cada subconjunto finito de Δ tiene un modelo, entonces Δ tiene un modelo.

Demostración

Sea L un lenguaje con β sentencias, β infinito. Sea $\langle c_k \rangle_{k<\beta}$ una familia de β constantes nuevas. Puesto que β es infinito, $L \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$ tiene también β sentencias. Sea $\langle \varphi_\alpha \rangle_{\alpha<\beta}$ una ordenación de las sentencias de $L \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$.

Se puede formar una cadena $\langle \Delta_\alpha \rangle_{\alpha<\beta}$ de conjuntos de sentencias de L $\cup$ $\langle c_k \rangle_{k<\beta}$ con las siguientes propiedades:

1) En cada Δ_α ocurren menos de β constantes de $\langle c_k \rangle_{k<\beta}$.

2) Δ_α es finitamente satisfacible; es decir, cada subconjunto finito cuyo tiene un modelo.

3) Si $\Delta_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ es finitamente satisfacible, entonces $\varphi_\alpha \in \Delta_{\alpha+1}$.

4) Si $\varphi_\alpha \in \Delta_{\alpha+1}$ y φ_α es de la forma $\exists x \psi$, entonces $S_x^{c_k} \psi \in \Delta_{\alpha+1}$, para algún $c_k \in \langle c_k \rangle_{k<\beta}$.

Hagamos $\Delta_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \Delta_\alpha$. Fácilmente se demuestra que Δ_β tiene las propiedades a), b) y c) del lema anterior (2.1). Por otra parte, la relación $\{\langle c_1, c_2 \rangle / c_1 = c_2 \in \Delta_\beta\}$ es de equivalencia sobre el conjunto $C = \{c_k\}_{k<\beta}$.

Elijamos un conjunto $M \subseteq C$ tal que contenga justamente un elemento de cada clase de equivalencia y ordenar M en $\overline{\mathbf{m}}$. Sea Γ el conjunto de todas las sentencias de L $\cup$ $\langle c_k \rangle_{k<\beta}$ que pertenecen a Δ. En este caso, Γ tiene las propiedades a), b), c) y d) del lema 2.1, y por tanto, $\Gamma = \mathrm{TEO}(\langle \mathcal{E}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$ para un cierto sistema $\mathcal{E}$ de universo M.

Este sistema $\mathcal{E}$ es modelo de Δ ya que $\Delta \subseteq \Delta_\beta$, $\Delta \subseteq \Gamma$ pues $\Delta \subseteq \mathrm{SEN(L)}$ y en las fórmulas de Δ no aparecen constantes del conjunto C de constantes nuevas. ■

2.3. *Ejercicios*

1) Demostrad que SEN(L) tiene cardinalidad k, cuando k (infinito) es la cardinalidad de L.

2) Completad la prueba del lema 2.1. Concretamente, que $\Gamma = \mathrm{TEO}(\langle \mathcal{E}, \overline{\mathbf{m}} \rangle)$.

3) Habreis observado que en la demostración de 2.2 hay muchas afirmaciones sin probar, hacedlo. Lo mejor sería que rehiciérais la demostración desde el principio. Señalad cuando se utiliza el axioma de elección en cualquiera de sus versiones.

Problema 3

Comparad la prueba de compacidad de V.2.2 con la de III.4.9. Señalad diferencias y similitudes, no sólo de la prueba del teorema de compacidad, sino del montaje previo a su demostración.

Problema 4

Sea $\Gamma = \{\neg\forall x\, Px\} \cup \{Pv / v \in \mathcal{V}\}$. ¿Tiene Γ algún modelo?
¿Tiene algún modelo Γ con $\mathcal{I}: \mathcal{V} \to A$ inyectiva?
Comentad el resultado obtenido en lo que de paradójico pudiera tener.

Problema 5

Sea Γ una teoría en un lenguaje L y $\mathcal{P}$ una propiedad finitamente axiomatizable en L. Demostrad que MOD(Γ) tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si y sólo si la sentencia que determina $\mathcal{P}$ es una consecuencia de Γ.

3. ALGUNAS DE LAS CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE COMPACIDAD

He organizado este apartado conforme al siguiente cuadro:

T.	Compacidad.	Γ tiene un modelo syss cada subconjunto finito suyo lo tiene
	↓	
3.1.	Lema.	Si Γ tiene modelos finitos arbitrariamente grandes, entonces tiene un modelo infinito.
	↓	
3.2.	Corolario.	La finitud no es axiomatizable.
3.3.	Lema.	Si $\mathcal{K}$ = MOD(Γ) es finitamente axiomatizable, entonces $\mathcal{K}$ es axiomatizable por un subconjunto finito de Γ.
3.4.	Lema.	$\mathcal{K}$ es finitamente axiomatizable syss $\mathcal{K}$ y $\mathcal{M} - \mathcal{K}$ son axiomatizables.
	↓	
3.5.	Corolario.	La infinitud es axiomatizable, pero no finitamente.
3.6.	Corolario.	La clase de los cuerpos de característica 0 es axiomatizable, pero no finitamente.
3.7.	Teorema.	(Aritmética no estándar).
3.9.	Teorema.	Un grafo $\langle \mathbf{M}, \mathbf{R} \rangle$ es k-coloreable syss cada subsistema finito suyo es k-coloreable.
3.10.	Teorema.	Las inmersiones elementales son amalgamables.
3.12.	Teorema.	Si T admite eliminación de cuantificadores, entonces la clase $\mathcal{K}$ de todos lo subsistemas de modelos de T es amalgamable.

3.1. Lema

Si Γ es un conjunto de sentencias que tiene modelos finitos arbitrariamente grandes, entonces Γ tiene un modelo infinito.

Demostración

Lo que vamos a hacer es ampliar el conjunto de sentencias con la colección infinita numerable de sentencias φ_n que expresan: «hay al menos n elementos». Cada subconjunto finito del conjunto ampliado tendrá un modelo, y por compacidad también lo tendrá el total.

Sea, pues, Γ un conjunto de sentencias y sea $\Gamma^* = \Gamma \cup \{\varphi_n / n > 1\}$ donde

$$\varphi_n = \exists x_1 \ldots x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j.$$

Queremos ver que cada subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma^*$ tiene un modelo. Sea

$$\Delta \subseteq \Gamma \cup \{\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_p}\}$$

donde máx $\{i_{i_1}, \ldots, i_p\} = m$.

Claramente, $\mathrm{MOD}(\Gamma \cup \{\varphi_m\}) \subseteq \mathrm{MOD}(\Delta)$ ya que

$$\mathrm{MOD}(\{\varphi_m\}) = \mathrm{MOD}(\{\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_p}\})$$

y entre los conjuntos de sentencias se da la inclusión contraria. Puesto que Γ tiene modelos finitos arbitrariamente grandes, tendrá uno, llamémosle $\mathcal{A}$, de al menos m elementos. En tal caso, $\mathcal{A} \in \mathrm{MOD}(\Gamma \cup \{\varphi_m\})$ y por tanto $\mathcal{A} \in \mathrm{MOD}(\Delta)$.

Aplicando ahora el teorema de compacidad concluimos que Γ^* tiene un modelo. Evidentemente, un modelo de $\{\varphi_n / n > 1\}$ ha de ser infinito. Sea $\mathcal{B}$ un modelo de Γ^*. Puesto que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, $\mathrm{MOD}(\Gamma^*) \subseteq \mathrm{MOD}(\Gamma)$ (ejercicio 4) de IV.5.7). Por tanto, $\mathcal{B} \in \mathrm{MOD}(\Gamma)$.

Con esto la prueba finaliza. ■

3.2. Corolario

La propiedad de ser finito no es axiomatizable.

Supongamos que la propiedad de ser finito fuera axiomatizable. Tendría, pues, que existir un conjunto de sentencias Σ de un cierto lenguaje $L_{(\mu,\delta)}$ tal que para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{(\mu,\delta)}$ se cumpliera: $\mathcal{A} \in \mathrm{MOD}(\Sigma)$ syss $\mathcal{A}$ es finito. Esto es imposible, pues Σ iría teniendo modelos finitos arbitrariamente grandes que lo llevarían a tener uno infinito. Esto contradice el supuesto de que Σ axiomatice la finitud.

3.3. Lema

Si $\mathcal{K} = \mathrm{MOD}(\Gamma)$ y $\mathcal{K}$ es finitamente axiomatizable, entonces $\mathcal{K}$ es axiomatizable por un subconjunto finito de Γ.

Demostración

Sea $\mathcal{K}$ = MOD(Γ) y supongamos que $\mathcal{K}$ es finitamente axiomatizables; es decir, $\mathcal{K}$ = MOD(α) para una cierta sentencia del lenguaje L en donde están escritas las sentencias de Γ.

Así pues, partimos de que MOD(Γ) = MOD(α).

Sea $\Gamma^* = \Gamma \cup \{\neg \alpha\}$.

MOD(Γ^*) = MOD($\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$) = MOD($\Gamma$) $\cap$ MOD($\neg\alpha$) = MOD(α) $\cap$ MOD($\neg\alpha$) = $\varnothing$. (Por ejercicio 5a) de IV.5.7).

Puesto que Γ^* no tiene ningún modelo, alguno de sus subconjuntos finitos debe no tener modelo (ya que, si todos sus subconjuntos finitos tuvieran modelos, también lo tendría Γ^*: Compacidad).

Sea $\Delta \subseteq \Gamma^*$ finito y tal que MOD(Δ) = $\varnothing$. $\neg\alpha \in \Delta$, pues si $\neg\alpha \notin \Delta$, entonces $\Delta \subseteq \Gamma$ y cualquier $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ sería modelo suyo. Sea $\Delta = \{\psi_1, \ldots, \psi_n, \neg\alpha\}$.

$$\text{MOD}(\alpha) = \text{MOD}(\Gamma) \subseteq \text{MOD}(\psi_1, \ldots, \psi_n) \text{ (pues } \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma)$$

Pero MOD(α) = MOD($\psi_1, \ldots, \psi_n$) (pues en caso contrario, MOD(Δ) $\neq \varnothing$).

Hemos demostrado que hay un subconjunto finito Σ de Γ tal que $\mathcal{K}$ = MOD(Σ). ■

3.4. Lema

$\mathcal{K}$ es finitamente axiomatizable syss $\mathcal{K}$ y su complementaria, $\mathcal{M} - \mathcal{K}$, son ambas axiomatizables.

Demostración

Sea $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ una clase de sistemas.

[$\Rightarrow$] $\mathcal{K}$ = MOD(α), pues $\mathcal{K}$ es finitamente axiomatizable.

$$\mathcal{M} - \mathcal{K} = \text{MOD}(\varnothing) - \text{MOD}(\alpha) = \text{MOD}(\neg\alpha).$$

Pues $\mathcal{M}$ = MOD($\varnothing$) por ejercicio 3) de IV.5.7 y si

$$\mathcal{A} \notin \text{MOD}(\alpha) \text{ entonces } \mathcal{A} \in \text{MOD}(\neg\alpha).$$

[$\Leftarrow$] Sea $\mathcal{K}$ axiomatizable y también lo sea $\mathcal{M} - \mathcal{K}$. Es decir,

$$\mathcal{K} = \text{MOD}(\Gamma) \text{ y } \mathcal{M} - \mathcal{K} = \text{MOD}(\Delta).$$

$\mathcal{K} \cap (\mathcal{M} - \mathcal{K}) = \varnothing$ = MOD($\Gamma \cup \Delta$). Por ejercicio 5a) de IV.5.7.

Puesto que $\Gamma \cup \Delta$ no tiene ningún modelo, debe de tener algún subconjunto finito que carezca de modelos (Compacidad). Sea

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m\} \subseteq \Gamma \cup \Delta$$

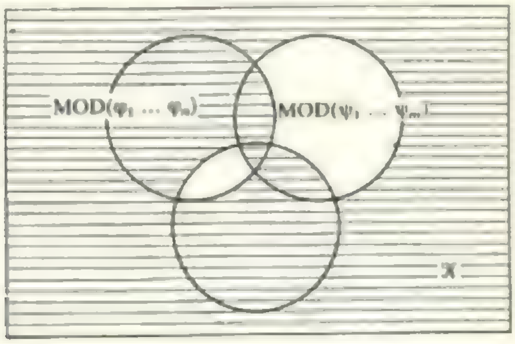
tal que

$$\mathrm{MOD}(\varphi_1, \ldots, \psi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m) = \varnothing.$$

Supondremos que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$ y que $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \Delta$, pues los demás casos posibles se resuelven trivialmente.

$$\mathrm{MOD}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \cap \mathrm{MOD}(\psi_1, \ldots, \psi_m) = \varnothing$$
$$\mathcal{K} = \mathrm{MOD}(\Gamma) \subseteq \mathrm{MOD}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$
$$\mathcal{M} - \mathcal{K} = \mathrm{MOD}(\Delta) \subseteq \mathrm{MOD}(\psi_1, \ldots, \psi_m).$$

De estos tres enunciados se deduce que $\mathcal{K} = \mathrm{MOD}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ (véase dibujito).



Por consiguiente, $\mathcal{K} = \mathrm{MOD}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$ y es finitamente axiomatizable, por ejercicio 5d) de IV.5.7. ■

3.5. Corolario

La propiedad de ser infinito es axiomatizable, pero no finitamente axiomatizable.

Demostración

En el ejemplo 1 de 1.1 vimos que la propiedad de ser infinito es axiomatizable. Por otra parte, la propiedad de ser finito no es axiomatizable (corolario 3.2). Puesto que si $\mathcal{K}$ es la clase de los sistemas finitos, la de los infinitos será $\mathcal{M} - \mathcal{K}$ y la primera no es axiomatizable, concluimos que $\mathcal{M} - \mathcal{K}$ no es finitamente axiomatizable (lema 3.4) y esto pasará para cada tipo $\langle \mu, \delta \rangle$. ■

3.6. Corolario

La clase de los cuerpos de característica 0 es axiomatizable, pero no finitamente.

Demostración

En el ejemplo 7 de 1.2 vimos que la clase [Cuerp. Caract. 0] de los cuerpos de característica 0 es axiomatizable.

$$[\text{Cuerp. Caract. } 0] = \text{MOD}(\{\alpha, u + u \neq e, \ldots, u + \ldots^{p} + u \neq e, \ldots\}).$$

Si [Cuerp. Caract. 0] fuera finitamente axiomatizable, habría de serlo por un subconjunto del conjunto de sentencias anterior (lema 3.3). Supongamos que [Cuerp. Carct. 0] = MOD(Γ) y sea

$$\Gamma = \{\alpha_c, u + \ldots^{p_1} + u \neq e, \ldots, u + \ldots^{p_n} + u \neq e\}.$$

Sea p un número primo mayor que todos los que definen a Γ. Este número siempre existe (Euclides). En este caso, $\mathfrak{I}_p = \langle \mathbb{Z}_p, \bar{0}, \bar{1}, \bar{+}, \bar{\cdot} \rangle$ es un modelo de Γ. Es decir, $\mathfrak{I}_p \in$ MOD(Γ). Pero evidentemente, $\mathfrak{I}_p \notin$ [Cuerp. Caract. 0] pues la característica de $\mathfrak{I}_p$ es p: no se trata, claramente, de un cuerpo de característica 0. ■

3.7. Teorema (Aritmética no estándar)

Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \cdot \rangle$ el sistema de los naturales tal y como lo conocemos intuitivamente. Hay un sistema $\mathcal{M}_0$ que es modelo de TEO($\mathcal{N}$) pero no isomorfo a $\mathcal{N}$.

Demostración

Sea L el lenguaje de primer orden adecuado a $\mathcal{N}$; es decir, con un functor ceroario, c, otro monario, f y dos binarios, $+$ y $\cdot$.

Sea L* la extensión de L obtenida al añadir a L un nuevo functor ceroario, k.

Sea $\Sigma^* =$ TEO($\mathcal{N}$) ∪ $\{\alpha_n / n \in \mathbb{N}\}$ donde α_n es la sentencia que afirma que el individuo denotado por k no es el número n (siguiente del cero n veces). Es decir,

$$\alpha_n \equiv \neg\, k = f \ldots^{n} fc.$$

3.7.1. *Proposición:* Cada subconjunto finto de Σ^* tiene un modelo.

En efecto, sea $\Sigma_0 \subseteq \Sigma^*$ un subconjunto finito de Σ^*. Habrá en Σ_0 un α_n de subíndice máximo; es decir, tal que $\alpha_m \notin \Sigma_0$ para cada $m > n$. Sea

$$\langle \mathcal{N}, n + 1 \rangle = \langle \mathbb{N}, 0, n + 1, S, +, \cdot \rangle$$

√

esta partición es tal que en un mismo subconjunto no pueden estar dos elementos conectados. □

3.9. Teorema

Un grafo $\langle \mathbf{M}, \mathbf{R} \rangle$ es m-coloreable syss cada subsistema finito suyo es m-coloreable.

Demostración

Es el problema 8. ■

3.10. Teorema

Las inmersiones elementales tienen la propiedad de ser amalgamables. Es decir, si $\mathbf{f}$ es una inmersión elemental de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ y $\mathbf{g}$ lo es de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}$, hay entonces un sistema $\mathcal{D}$ y dos inmersiones elementales de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{D}$ y de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ tales que el diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B} \arrow[dr, "\underset{\prec}{\mathbf{h}}"] & \\
\mathcal{A} \arrow[ur, "\underset{\prec}{\mathbf{f}}"] \arrow[dr, "\underset{\prec}{\mathbf{g}}"'] & & \mathcal{D} \\
 & \mathcal{C} \arrow[ur, "\underset{\prec}{\mathbf{i}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ sistemas similares de cardinalidades α, β y γ respectivamente. Sea L un lenguaje adecuado para hablar de ellos y sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ inmersiones elementales de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ y de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}$. Sea $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_k \rangle_{k<\alpha}$ una enumeración sin repeticiones de $\mathbf{A}$.

Sean $T_{\mathcal{B}}$ y $T_{\mathcal{C}}$ las teorías siguientes:

$T_{\mathcal{B}} = \mathrm{TEO}(\langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle)$ siendo $\bar{\mathbf{b}} = \langle \mathbf{b}_k \rangle_{k<\beta}$ y para cada $k < \alpha$, $\mathbf{b}_k = \mathbf{f}(\mathbf{a}_k)$

$T_{\mathcal{C}} = \mathrm{TEO}(\langle \mathcal{C}, \bar{\mathbf{c}} \rangle)$ siendo $\bar{\mathbf{c}} = \langle \mathbf{c}_k \rangle_{k<\gamma}$ y para cada $k < \alpha$, $\mathbf{c}_k = \mathbf{g}(\mathbf{a}_k)$.

$T_{\mathcal{B}}$ está escrita en el lenguaje $L \cup \langle b_k \rangle_{k<\beta}$ y $T_{\mathcal{C}}$ en el $L \cup \langle c_k \rangle_{k<\gamma}$.

Sea $T = T_{\mathcal{B}} \cup T_{\mathcal{C}} \cup \{b_k = c_k / k < \alpha\}$. *Esta teoría está escrita en* $L \cup \langle b_k \rangle_{k<\beta} \cup \langle c_k \rangle_{k<\gamma} = L^*$.

3.10.1. *Proposición:* Cada subconjunto finito de T tiene un modelo.

Sea T_0 un subconjunto finito de T. En él sólo aparecen un número finito de constantes nuevas $b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}$ y $c_{r_1}, \ldots, c_{r_m}$. Hay que considerar dos posibilidades:

1.ª) Que los elementos $\mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_n}$ y $\mathbf{c}_{r_1}, \ldots, \mathbf{c}_{r_m}$ de $\bar{\mathbf{b}}$ y $\bar{\mathbf{c}}$ que interpretan en $\langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ y $\langle \mathcal{C}, \bar{\mathbf{c}} \rangle$ a dichas constantes están todos en los recorridos respectivos de $\mathbf{f}$ y de $\mathbf{g}$.

2.ª) Que alguno de ellos no esté en el recorrido de las inmersiones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ respectiva.

En la primera posibilidad sean $\bar{\mathbf{a}}'$ y $\bar{\mathbf{a}}''$ enumeraciones completas y con repeticiones de $\mathbf{A}$. Sea $\bar{\mathbf{a}}' = \langle \mathbf{a}'_k \rangle_{k<\beta}$ donde $\mathbf{a}'_k = \mathbf{a}_k = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{b}_k)$ para $k < \alpha$ y $\mathbf{a}'_k = \mathbf{a}_1$ para cada $k \geq \alpha$, $k < \beta$. Y sea $\bar{\mathbf{a}}'' = \langle \mathbf{a}''_k \rangle_{k<\gamma}$ donde $\mathbf{a}''_k = \mathbf{a}_k = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{c}_k)$ para $k < \alpha$ y $\mathbf{a}''_k = \mathbf{a}_1$ para $k \geq \alpha$, $k < \gamma$.

En la segunda posibilidad supongamos que b_{i_s} es tal que $\mathbf{b}_{i_s} \notin$ Rec $\mathbf{f}$. Definiremos una enumeración $\bar{\mathbf{a}}'$ que coincide con la definida en el caso anterior, excepto por lo que atañe al elemento $\mathbf{a}'_{i_s}$ que será un cierto $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ que funcione bien como denotación de b_{i_s}. Ahora se verá cual.

Demostraremos que en cualquier caso $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}}', \bar{\mathbf{a}}'' \rangle$ es modelo de T_0.

Evidentemente en $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}}', \bar{\mathbf{a}}'' \rangle$ la denotación de los términos b_k coincide con la de los c_k para $k < \alpha$. Por consiguiente, $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}}', \bar{\mathbf{a}}'' \rangle$ es modelo de $b_k = c_k$ para $k < \alpha$.

Para las $\varphi \in T_{\mathcal{B}} \cap T_0$ con todos los $\mathbf{b}_{i_s} \in$ Rec $\mathbf{f}$ es evidente que $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}}', \bar{\mathbf{a}}'' \rangle$ es modelo de φ. La razón es como sigue:

En primer lugar, puesto que $\varphi \in$ TEO$(\langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle)$, $\langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ es modelo de φ.

Además, asociemos a la fórmula φ de L^* una φ^∇ de L tal que $\mathbf{S}^{b_{i_1} \ldots b_{i_n}}_{y_1 \ldots y_n} \varphi^\nabla = \varphi$, siendo $y_1, \ldots, y_n$ variables nuevas; no todos los b_{i_s} ocurren en φ.

$\langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ es modelo de φ syss $\mathcal{B}[\mathbf{b}_{i_1} \ldots \mathbf{b}_{i_n}]$ sat φ^∇

syss $\mathcal{B}[\mathbf{f}(\mathbf{a}_{i_1}) \ldots \mathbf{f}(\mathbf{a}_{i_n})]$ sat φ^∇

syss $\mathcal{A}[\mathbf{a}_{i_1} \ldots \mathbf{a}_{i_n}]$ sat φ^∇

syss $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}}', \bar{\mathbf{a}}'' \rangle$ es modelo φ.

¿Qué sucede cuando $\varphi \in T_{\mathcal{B}} \cap$ T pero algún $\mathbf{b}_{i_s}$ de los que interpretan a las constantes b_{i_s} resulta no estar en el recorrido de $\mathbf{f}$?

Sabemos por IV.3.4 que $\mathbf{f}[\mathcal{A}] \prec \mathcal{B}$. También utilizaremos el corolario IV.2.5.

$\langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ es modelo de φ syss $\mathcal{B}[\mathbf{b}_{i_1} \ldots \mathbf{b}_{i_n}]$ sat φ^∇

syss $\mathcal{B}[\mathbf{f}(\mathbf{a}_{i_1}) \ldots \mathbf{f}(\mathbf{a}_{i_{n-1}})\ \mathbf{f}(\mathbf{x})]$ sat φ^∇

syss $\mathcal{A}[\mathbf{a}_{i_1} \ldots \mathbf{a}_{i_{n-1}}\ \mathbf{x}]$ sat φ^∇

syss $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}}', \bar{\mathbf{a}}'' \rangle$ es modelo de φ

Puesto que hemos visto que cada subconjunto finito de T tiene un modelo, por el teorema de compacidad sabemos que T también. Sea $\mathcal{D}^* = \langle \mathcal{D}, \bar{\mathbf{d}}', \bar{\mathbf{d}}'' \rangle$ un modelo de T y sea $\mathcal{D}$ la reducción de dicho sistema al lenguaje L.

3.10.2. *Proposición:* Hay funciones $\mathbf{h}$: $\mathbf{B} \to \mathbf{D}$ y $\mathbf{j}$: $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ que son inmersiones elementales de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{D}$ y de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$.

Definamos $\mathbf{h}$: $\mathbf{B} \to \mathbf{D}$ así: para cada $\mathbf{b}_k \in \mathbf{B}$, $\mathbf{h}(\mathbf{b}_k) = \mathfrak{D}^*(b_k)$. Es decir, la denotación en $\mathfrak{D}^*$ de la constante b_k de igual subíndice. O sea, $\mathbf{d}'_k = \mathbf{h}(\mathbf{b}_k)$.

De forma similar $\mathbf{j}$: $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ se define así $\mathbf{j}(\mathbf{c}_k) = \mathfrak{D}^*(c_k)$. Es decir, la denotación en $\mathfrak{D}^*$ de la constante c_k de igual subíndice. O sea, $\mathbf{d}''_k = \mathbf{j}(\mathbf{c}_k)$.

Evidentemente $\langle \mathfrak{D}, \bar{\mathbf{d}}' \rangle$ es modelo de TEO$(\mathfrak{B}, \bar{\mathbf{b}})$ y puesto que $\bar{\mathbf{d}}' = \langle \mathbf{h}(\mathbf{b}_k) \rangle_{k<\alpha}$ por IV.6.7 concluimos que $\mathbf{h}$ es inmersión de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{D}$.

También $\langle \mathfrak{D}, \mathbf{d}'' \rangle$ es modelo de TEO$\langle \mathfrak{C}, \bar{\mathbf{c}} \rangle$ y por lo tanto $\mathbf{j}$ es inmersión de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$.

3.10.3. *Proposición:* El diagrama es conmutativo.

Es decir, para cada

$$\mathbf{x} \in \mathbf{A}: \mathbf{h}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{j}(\mathbf{g}(\mathbf{x})).$$

En efecto, todo $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ ocupa un lugar en la enumeración $\mathbf{x} = \mathbf{a}_k$, $k < \alpha$. $\mathbf{f}(\mathbf{a}_k) = \mathbf{b}_k$ y $\mathbf{g}(\mathbf{a}_k) = \mathbf{c}_k$. Pero $\mathbf{h}(\mathbf{b}_k) = \mathfrak{D}^*(b_k) = \mathfrak{D}^*(c_k) = \mathbf{j}(\mathbf{c}_k)$ pues $\mathfrak{D}^*$ es modelo de $b_k = c_k$ para los $k < \alpha$. ■

3.11. Definiciones

3.11.1. *Clase de sistemas amalgamable*

Una clase $\mathcal{K}$ de sistemas del mismo tipo es amalgamable sí y sólo si: siempre que $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C} \in \mathcal{K}$ y $\mathbf{f}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sea inmersión de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ y $\mathbf{g}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$ también lo sea, hay un sistema $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}$ tal que el diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{B} \arrow[dr] & \\
\mathfrak{A} \arrow[ur, "\mathbf{f}"] \arrow[dr, "\mathbf{g}"'] & & \mathfrak{D} \\
 & \mathfrak{C} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

□

3.11.2. *Eliminación de cuantificadores*

Sea $\Gamma \subseteq$ SEN(L). Decimos que Γ admite eliminación de cuantificadores sí y sólo si para cada $\varphi \in$ FOR(L) hay un $\psi \in$ FOR(L) tal que ψ no está cuantificada, LBR(φ) = LBR(ψ) y $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \psi$.

3.12. Teorema

Si T es una teoría que admite eliminación de cuantificadores, entonces la clase $\mathcal{K}$ de todos los subsistemas de los modelos de T es amalgamable.

Demostración

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C} \in \mathcal{K}$ y $\mathbf{f}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ inmersión y $\mathbf{g}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$ también inmersión.

Por el ejercicio 2) de II.5.3 sabemos que para fórmulas φ sin cuantificadores se verifica que

$$\mathcal{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathcal{B}[\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)] \text{ sat } \varphi.$$

Y también

$$\mathcal{A}[\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \mathcal{C}[\mathbf{g}(\mathbf{x}_1) \ldots \mathbf{g}(\mathbf{x}_n)] \text{ sat } \varphi$$

Puesto que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ son modelo de una teoría que admite eliminación de cuantificadores, las anteriores equivalencias se verificarán para fórmulas cualesquiera, incluso cuantificadas.

Vamos a demostrar este teorema de forma similar a como demostramos V.3.10. Sea $\mathbf{\bar{a}}$ una enumeración completa y sin repeticiones de $\mathbf{A}$ · $\mathbf{\bar{b}}$ y $\mathbf{\bar{c}}$ enumeraciones de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ cuyos términos $k < \alpha$ son las imágenes mediante $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$, respectivamente, de los que integran $\mathbf{\bar{a}}$.

Sea $U = \mathrm{DIAG}(\mathcal{B}) \cup \mathrm{DIAG}(\mathcal{C}) \cup \{b_k = c_k / k < \alpha\}$

3.12.1. ***Proposición***

Cada subconjunto finito de U tiene un modelo.

3.12.2. ***Proposición***

Si $\mathcal{D}^*$ es un modelo U, su reducción $\mathcal{D}$ al tipo de L es elemento de $\mathcal{K}$.

3.12.3. ***Proposición***

Hay funciones $\mathbf{h}$: $\mathbf{B} \to \mathbf{D}$ y $\mathbf{j}$: $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ que son inmersiones de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{D}$ y de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$.

3.12.4. ***Proposición***

El diagrama es conmutativo. ■

3.13. *Ejercicios*

1) Completad la demostración del teorema 3.12.

2) Demostrad que si Γ tiene sólo modelos finitos, entonces hay un n tal que cada modelo de Γ tiene a lo sumo n elementos.

3) La propiedad de ser un grupo finito no es axiomatizable.

4) La clase $\mathcal{K}$ constituida por todos los sistemas que son grafos es axiomatizable. ¿Podríais formular sus axiomas?

5) Formulad ahora la propiedad de ser m-coloreable. Para ello añadid al lenguaje de tipo $\langle \varnothing; 2 \rangle$ m relatores monarios: $P_1, \ldots, P_m$.

Problema 6

Sea |Buen Ord.| la clase de los buenos órdenes. Demostrad que |Buen Ord.| no es axiomatizable. ¿Para hacerlo suponed que si lo fuera y que Σ fueran los axiomas. Añadid constantes y demostrad que $\Sigma \cup \{c_{n+1} \leq c_n / n \in \mathbb{N}\}$ tiene un modelo. ¿Os da esto alguna pista?

Problema 7

Demostrad que todo orden parcial $\langle \mathbf{A}, \mathbf{R} \rangle$ puede extenderse a un orden lineal $\langle \mathbf{A}, \mathbf{L} \rangle$ sobre el mismo conjunto; es decir, $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{L}$ y $\mathbf{L}$ es un orden lineal.

Problema 8

Demostrad el teorema 3.9.

En primer lugar, demostrad que si $\langle \mathbf{M}, \mathbf{R} \rangle$ es un grafo m-coloreable y $H = \{H_1, \ldots, H_n\}$ es la partición que lo posibilita, entonces cada subsistema finito $\langle \mathbf{M}_0, \mathbf{R}_0 \rangle$ de $\langle \mathbf{M}, \mathbf{R} \rangle$ es también m-coloreable (la partición es $J - \{\varnothing\}$, siendo $J = \{H_1 \cap \mathbf{M}_0, \ldots, H_n \cap \mathbf{M}_0\}$).

Para demostrar que si cada subsistema finito de $\mathcal{M} = \langle \mathbf{M}, \mathbf{R} \rangle$ es m-coloreable, $\mathcal{M}$ también lo es, hay que extender en primer lugar $L(\mathcal{M})$ añadiéndole m relatores monarios y después una constante individual para nombrar a cada elemento de $\mathbf{M}$. En el nuevo lenguaje formulamos un conjunto Δ de sentencias cuyos modelos originan grafos m-colorables. La prueba de que Δ tiene efectivamente un modelo se hará por compacidad.

Problema 9

Sea $\mathcal{M}_0$ un modelo numerable de TEO($\mathcal{N}$) construido como en V.3.7. Y sea

$$\varphi\langle x, y\rangle = \exists\, z(z \neq c \wedge qxz = y)$$

Demostrad:

i) $\forall xy\, (\varphi\langle x, y\rangle \vee \varphi\, \langle y, x\rangle \vee x = y) \in$ TEO($\mathcal{N}$).

ii) $\langle \mathbf{M}, \mathbf{R}\rangle$ es un orden lineal, siendo **M** el universo de $\mathcal{M}_0$ y **R** la relación binaria definida por $\varphi\langle x, y\rangle$ así:

$$\mathbf{R} = \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \in \mathbf{M}^2 / \mathcal{M}_0[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \text{ sat } \varphi\langle x, y\rangle\}$$

Problema 10

Sea $\mathcal{K}$ la clase de los subsistemas de los modelos de la teoría de órdenes densos sin extremos. ¿Qué se puede afirmar que $\mathcal{K}$?

*4. LA CONSTRUCCION DE ULTRAPRODUCTOS

En este apartado volvemos sobre el teorema de compacidad para ofrecer una nueva prueba de él. En este caso, en vez de utilizar el método de los diagramas, utilizaremos los ultraproductos, otro procedimiento para construir modelos. Como podeis comprender, el interés de esta prueba no reside en el resultado, con el que ya contamos, sino en el propio proceso de construcción.

Me satisface la construcción de ultraproductos para demostrar el teorema de compacidad porque se corresponde con la intuición de que siendo este teorema semántico, debería poderse demostrar directamente, combinando de algún modo los modelos de los conjuntos finitos para construir el del infinito. Esta intuición es correcta y, de hecho, lo que hacemos es utilizar la noción booleana de ultraproducto (filtro maximal) para construir como modelo un ultraproducto de los modelos iniciales. Ahora veréis cómo.

NOTA 1

He añadido un apéndice sobre filtros y ultrafiltros al final del capítulo, leedlo antes que esto, si desconoceis el tema.

---

* Podéis saltaros todo el apartado, no se pierde continuidad.

NOTA 2

Vamos a considerar sistemas relacionales muy simples que sólo constan de un universo no vacío y de una relación binaria definida sobre dicho universo. La generalización a sistemas con más relaciones y en donde aparezcan funciones, la indicaremos, pero las demostraciones las haremos para el sistema simple, lo que nos permitirá adoptar una notación más clara.

4.1. Producto directo

Sea $\langle \mathcal{A}_i \rangle_{i \in I}$ una familia de sistemas del mismo tipo. En la versión abreviada, $\mathcal{A}_i = \langle \mathbf{A}_i, \mathbf{R}_i \rangle$. El lenguaje L, adecuado para hablar de estos sistemas, sólo posee un relator, **R**.

4.1.1. *Definición*

El producto directo $\Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i$ es un sistema $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B}, \mathbf{R} \rangle$, del mismo tipo, definido así:

i) **B** es el producto directo de la familia $\langle \mathbf{A}_i \rangle_{i \in I}$ de los universos de los $\mathcal{A}_i$.

$$\mathbf{B} = \Pi_{i \in I}\mathbf{A}_i = \{\mathbf{b}: I \rightarrow \bigcup_{i \in I}\mathbf{A}_i \;/\; \forall i \in I\ \mathbf{b}(i) \in \mathbf{A}_i\}$$

ii) **R** es la relación sobre **B** siguiente: para cada $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbf{R} \text{ syss para cada } i \in I,\ \langle \mathbf{a}(i), \mathbf{b}(i) \rangle \in \mathbf{R}_i$$

En particular, el signo de igualdad se interpretará como la identidad. Es decir, dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}$, $\mathcal{B}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ sat. $x = y$ syss para cada $i \in I$: $\mathcal{A}_i[\mathbf{a}(i), \mathbf{b}(i)]$ sat $x = y$ para cada $i \in I$: $\mathbf{a}(i) = \mathbf{b}(i)$ syss $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

NOTA

Si los sistemas de la familia $\langle \mathcal{A}_i \rangle_{i \in I}$ no fueran de tipo $\langle \varnothing; 2 \rangle$, y aparecieran funciones y relaciones, las definiríamos así:

i) Para cada relator n-ario P, la relación **P** se define de forma que para cada $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbf{B}$, $\langle \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \rangle \in \mathbf{P}$ syss para cada $i \in I$, $\langle \mathbf{b}_1(i), \ldots, \mathbf{b}_n(i) \rangle \in \mathbf{P}_i$.

ii) Para cada functor n-ario f, la función $\mathbf{f}: \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}$ se define de forma que para cada $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbf{B}$: $(\mathbf{f}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n))(i) = \mathbf{f}_i(\mathbf{b}_1(i), \ldots, \mathbf{b}_n(i))$ para cada $i \in I$. □

Sin embargo, aunque $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i = \mathcal{B}$ sea un sistema, tiene defectos lógicos importantes que lo inutilizan; $\mathcal{B}$ puede no compartir las propiedades de primer orden de los $\mathcal{A}_i$. En otras palabras, puede existir una sentencia φ de la que cada $\mathcal{A}_i$ sea un modelo que sin embargo no sea verdadera en $\mathcal{B}$. Por ejemplo, si cada $\mathcal{A}_i$ es un orden lineal con al menos dos elementos, cada $\mathcal{A}_i$ será modelo de la sentencia: $\sigma = \forall xy(Rxy \vee Ryx)$, pero $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i$ puede no serlo. La razón es que el producto cartesiano de órdenes lineales no es necesariamente un orden lineal.

4.1.2. *Relación de equivalencia*

Vamos a introducir una modificación del producto directo que no tiene el problema mencionado anteriormente. Para ello introduciremos ciertas relaciones de equivalencia en $\mathcal{B}$, el universo del producto directo, que resultarán ser de un cierto tipo de congruencia. Es aquí en donde necesitaremos el concepto de filtro. (Ver el apéndice).

4.1.2.1. *Definición*

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre I; es decir, un filtro del álgebra $\langle \wp I, \cup, \cap, \emptyset, I\rangle$. Definimos la relación $\equiv_{\mathcal{F}}$ sobre $\mathbf{B}$ así: para cada $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}$,

$$\mathbf{a} \equiv_{\mathcal{F}} \mathbf{b} \text{ syss } \{i \in I / \mathbf{a}(i) = \mathbf{b}(i)\} \in \mathcal{F}$$

4.1.2.2. *Proposición*

Siendo $\mathcal{F}$ un filtro sobre I, $\equiv_{\mathcal{F}}$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbf{B}$.

Demostración

1) $\equiv_{\mathcal{F}}$ es reflexiva. En efecto, $I = \{i \in I/\mathbf{a}(i) = \mathbf{a}(i)\} \in \mathcal{F}$ pues $\mathcal{F}$ es filtro.

2) $\equiv_{\mathcal{F}}$ es simétrica. Pues $\{i \in I/\mathbf{a}(i) = \mathbf{b}(i)\} = \{i \in I/\mathbf{b}(i) = \mathbf{a}(i)\}$.

3) $\equiv_{\mathcal{F}}$ es transitiva. En efecto, si $\mathbf{x} = \{i \in I/\mathbf{a}(i) = \mathbf{b}(i)\}$ y $\mathbf{y} = \{i \in I/\mathbf{b}(i) = \mathbf{c}(i)\} \in \mathcal{F}$ entonces $\mathbf{x} \cap \mathbf{y} \in \mathcal{F}$ y por ser $\mathbf{x} \cap \mathbf{y} \subseteq \{i \in I/\mathbf{a}(i) = \mathbf{c}(i)\}$, también $\{i \in I/\mathbf{a}(i) = \mathbf{c}(i)\} \in \mathcal{F}$. ■

La relación $\equiv_{\mathcal{F}}$ es de equivalencia y hemos dicho que también respeta, en un sentido que precisaremos, la relación $\mathbf{R}$ de $\mathbf{B}$. Para que $\equiv_{\mathcal{F}}$ fuera una auténtica relación de congruencia necesitaríamos que siempre que $\mathbf{b}_1 \equiv_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_2 \equiv_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_2$ y $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\rangle \in \mathbf{R}$ entonces $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle \in \mathbf{R}$; es decir, que

$$\{i \in I/\langle \mathbf{a}_1(i), \mathbf{a}_2(i)\rangle \in \mathbf{R}_i\} = I \text{ siempre que}$$

$$\{i \in I/\langle \mathbf{b}_1(i), \mathbf{b}_2(i)\rangle \in \mathbf{R}_i\} = I \text{ y que } \mathbf{b}_1 \equiv_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_1 \text{ y } \mathbf{b}_2 \equiv_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_2$$

$\equiv_{\mathcal{F}}$ no respeta la relación **R** de **B** hasta este extremo, pero se aproxima. Intuitivamente, un filtro sobre I —en el álgebra de partes —está formado por los subconjuntos «grandes» de I y podemos interpretar $\mathbf{a} \equiv_{\mathcal{F}} \mathbf{b}$ como si dijera que **a** y **b** coinciden en «casi todos sus valores». Argumentando en esta línea de razonamiento, podemos definir la relación $\mathbf{R}_{\mathcal{F}}$ sobre **B** diciendo que $\mathbf{R}_{\mathcal{F}}$ se da entre dos individuos de **B** cuando $\mathbf{R}_i$; se da entre «casi todas» las coordenadas de dichos individuos; es decir, sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbf{R}_{\mathcal{F}} \text{ syss } \{i \in I / \langle \mathbf{a}(i), \mathbf{b}(i) \rangle \in \mathbf{R}_i\} \in \mathcal{F}.$$

Pues bien, la relación que $\equiv_{\mathcal{F}}$ respeta, es precisamente la $\mathbf{R}_{\mathcal{F}}$.

4.1.2.3. *Modelos booleanos*

De hecho, aunque no sea necesario, lo que se suele hacer es pasar del producto directo $\Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i = \langle \mathbf{B}, \mathbf{R} \rangle$, a un modelo booleano $\langle \mathbf{B}, \mathbf{E}, \mathbf{R}' \rangle$ donde **E** representa el grado de igualdad y **R**' el de relación.

E se define así: para $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{i \in I / \mathbf{a}(i) = \mathbf{b}(i)\}.$$

Por consiguiente, cuanto más cerca esté $\mathbf{E}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ del conjunto I, «más iguales» serán **a** y **b**.

R' se define así: para cada $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}$,

$$\mathbf{R}'(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{i \in I / \langle \mathbf{a}(i), \mathbf{b}(i) \rangle \in \mathbf{R}_i\}.$$

Utilizando los modelos booleanos, a las fórmulas se les asignan valores de verdad booleanos, (no solamente 0 y 1) y se puede demostrar que el valor booleano de un teorema lógico es 1 (en nuestro caso, I).

Como dije, el paso por los modelos booleanos no es técnicamente necesario y lo suprimiremos. Lo que haremos será pasar directamente al producto reducido $\Pi_{i \in I} \mathcal{A}_i / \mathcal{F}$. Para justificar dicha construcción precisamos la proposición siguiente.

4.1.2.4. *Proposición*

$\equiv_{\mathcal{F}}$ es una relación de congruencia respecto de $\mathbf{R}_{\mathcal{F}}$.

Demostración

Sea $\mathbf{b}_1 \equiv_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_2 \equiv_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_2$.

Es decir,

$$\mathfrak{X} = \{i \in I/\mathbf{b}_1(i) = \mathbf{a}_1(i)\} \in \mathfrak{F}$$
$$\mathfrak{Y} = \{i \in I/\mathbf{b}_2(i) = \mathbf{a}_2(i)\} \in \mathfrak{F}$$

Veremos que si $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \in \mathbf{R}_{\mathfrak{F}}$ entonces $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \in \mathbf{R}_{\mathfrak{F}}$. En efecto, $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle \in \mathbf{R}_{\mathfrak{F}}$ equivale a que $\mathfrak{Z} = \{i \in I/\langle \mathbf{b}_1(i), \mathbf{b}_2(i) \rangle \in \mathbf{R}_i\} \in \mathfrak{F}$.
Por ser $\mathfrak{F}$ filtro, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{Z} \in \mathfrak{F}$. Pero $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} \cap \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{W}$, siendo $\mathfrak{W} = \{i \in I/\langle \mathbf{a}_1(i), \mathbf{a}_2(i) \rangle \in \mathbf{R}_i\}$ y por tanto, $\mathfrak{W} \in \mathfrak{F}$. Conclusión $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \in \mathbf{R}_{\mathfrak{F}}$. ■

4.2. Producto reducido

Utilizando las proposiciones anteriores podemos pasar del producto directo $\Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i$ al sistema $\Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i/\mathfrak{F}$, llamado producto reducido.

4.2.1. *Definición*

$\mathscr{C} = \Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i/\mathfrak{F}$ es el sistema definido como sigue:

i) El universo es el conjunto de las clases de equivalencia bajo $\mathfrak{F}$. Es decir,

$$\mathbf{C} = \Pi_{i \in I}\mathbf{A}_i/\mathfrak{F} = \{\mathbf{b} / \mathfrak{F}/\mathbf{b} \in \Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i\}$$

Esta definición es posible en virtud de V.4.1.2.2, que asegura que $=_{\mathfrak{F}}$ es de equivalencia.

ii) La relación $\mathbf{R}_{\mathfrak{F}}$ induce la relación $\mathbf{R}/\mathfrak{F}$ definida sobre $\mathbf{C}$ así:

$$\langle \mathbf{b}/\mathfrak{F}, \mathbf{c}/\mathfrak{F} \rangle \in \mathbf{R}/\mathfrak{F} \text{ syss } \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \in \mathbf{R}_{\mathfrak{F}}$$

Esta definición no depende de los representantes elegidos, según se desprende de V.4.1.2.4 y es, por consiguiente, correcta. □

NOTAS

Cuando $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro sobre I, el producto reducido $\Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i/\mathfrak{F}$ se denomina ultraproducto.
Si todos los sistemas $\mathcal{A}_i$ son un mismo sistema $\mathfrak{D} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{S} \rangle$, el producto reducido se escribe $\mathfrak{D}^I/\mathfrak{F}$ y se llama potencia reducida de $\mathfrak{D}$ sobre $\mathfrak{F}$. En este último caso $\Pi_{i \in I}\mathbf{A}_i$ es precisamente el conjunto $\mathbf{D}^I$, de las funciones de I en $\mathbf{D}$, y $\mathfrak{D}^I/\mathfrak{F} = \langle \mathbf{D}^I/\mathfrak{F}, \mathbf{S}/\mathfrak{F} \rangle$.
Cuando $\mathfrak{F}$ es ultrafiltro, a la potencia reducida de $\mathfrak{D}$ sobre $\mathfrak{F}$ se la llama ultrapotencia.

4.3. Teorema de Łoś y sus corolarios

Sea $\langle \mathcal{A}_i \rangle_{i \in I}$ una familia de sistemas del mismo tipo y $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro sobre I. Tanto los distintos $\mathcal{A}_i$, como el ultraproducto $\Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i/\mathfrak{F}$, son sistemas similares —en nuestro caso, de tipo $\langle \emptyset, 2 \rangle$—. Por tanto un lenguaje de tipo $\langle \emptyset; 2 \rangle$ será adecuado para hablar acerca de cualquiera de estos sistemas.

Antes de formular el teorema de Łoś, vamos a adoptar una serie de convenciones.

Sea $\mathcal{H}: \mathcal{V} \to \Pi_{i \in I}\mathbf{A}_i$ una asignación en el producto directo $\Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i$. Definimos dos asignaciones asociadas, $\mathcal{H}/\mathfrak{F}$ y $\mathcal{H}_i$ de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}/\mathfrak{F}: \mathcal{V} &\to \Pi_{i \in I}\mathbf{A}_i/\mathfrak{F} \\ x &\to \mathcal{H}(x)/\mathfrak{F} \end{aligned}$$

es decir, la asignación $\mathcal{H}/\mathfrak{F}$ sobre el ultraproducto $\Pi_{i \in I}\mathbf{A}_i/\mathfrak{F}$, a cada variable x de $\mathcal{V}$ le asigna la clase de equivalencia de $\mathcal{H}(x)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i: \mathcal{V} &\to \mathbf{A}_i \\ x &\to (\mathcal{H}(x))(i) \end{aligned}$$

esta otra asignación sobre el sistema $\mathcal{A}_i$ manda a cada x a la componente i-ésima de $\mathcal{H}(x)$.

4.3.1. *Teorema de Łoś*

Si $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro sobre I, entonces para cada fórmula φ de L y cada asignación $\mathcal{H}/\mathfrak{F}$ sobre el ultraproducto se cumple:

$$\Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i/\mathfrak{F}\ \mathcal{H}/\mathfrak{F} \text{ sat } \varphi \text{ syss } \{i \in I / \mathcal{A}_i \mathcal{H}_i \text{ sat } \varphi\} \in \mathfrak{F}$$

Demostración

Haremos una demostración por inducción.

F1) Si $\varphi = Rxy$ tenemos

$$\begin{aligned} \Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i/\mathfrak{F}\ \mathcal{H}/\mathfrak{F} \text{ sat } Rxy &\text{ syss } \langle \mathcal{H}/\mathfrak{F}(x), \mathcal{H}/\mathfrak{F}(y) \rangle \in \mathbf{R}/\mathfrak{F} \\ &\text{ syss } \langle \mathcal{H}(x)/\mathfrak{F}, \mathcal{H}(y)/\mathfrak{F} \rangle \in \mathbf{R}/\mathfrak{F} \\ &\text{ syss } \langle \mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y) \rangle \in \mathbf{R}_{\mathfrak{F}} \\ &\text{ syss } \{i \in I / \langle (\mathcal{H}(x))(i), (\mathcal{H}(y))(i) \rangle \in \mathbf{R}_i\} \in \mathfrak{F} \\ &\text{ syss } \{i \in I / \langle \mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_i(y) \rangle \in \mathbf{R}_i\} \in \mathfrak{F} \\ &\text{ syss } \{i \in I / \mathcal{A}_i \mathcal{H}_i \text{ sat } Rxy\} \in \mathfrak{F} \end{aligned}$$

En especial, si $\varphi \equiv x = y$ tenemos

$$\begin{aligned}\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i\mathcal{H}/\mathcal{F} \text{ sat } x = y &\text{ syss } \mathcal{H}/\mathcal{F}(x) = \mathcal{H}/\mathcal{F}(y)\\ &\text{ syss } \mathcal{H}(x)/\mathcal{F} = \mathcal{H}(y)/\mathcal{F}\\ &\text{ syss } \mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(y)\\ &\text{ syss } \{i \in I/(\mathcal{H}(x))\,(i) = \mathcal{H}(y))\,(i)\} \in \mathcal{F}\\ &\text{ syss } \{i \in I/\mathcal{H}_i(x) = \mathcal{H}_i(y)\} \in \mathcal{F}\\ &\text{ syss } \{i \in I/\mathcal{A}_i\mathcal{H}_i \text{ sat } x = y\} \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

F2) Sea $\varphi \equiv \neg\psi$.

$$\begin{aligned}\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}\ \mathcal{H}/\mathcal{F} \text{ sat } \neg\psi &\text{ syss no } \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}\ \mathcal{H}/\mathcal{F} \text{ sat } \psi\\ &\text{ syss } \{i \in I/\mathcal{A}_i\mathcal{H}_i \text{ sat } \psi\} \notin \mathcal{F} \text{ (sup. ind.)}\\ &\text{ syss } I - \{i \in I/\mathcal{A}_i\mathcal{H}_i \text{ sat } \psi\} \in \mathcal{F} \text{ (pues } \mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro)}\\ &\text{ syss } \{i \in I/\mathcal{A}_i\mathcal{H}_i \text{ sat } \neg\psi\} \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

F3) Sea $\varphi \equiv \psi \wedge \gamma$. Supongamos que se cumple para ψ y γ y sea

$$D_\psi = \{i \in I/\mathcal{A}_i\mathcal{H}_i \text{ sat } \psi\}$$
$$D_\gamma = \{i \in I/\mathcal{A}_i\mathcal{H}_i \text{ sat } \gamma\}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}\ \mathcal{H}/\mathcal{F} \text{ sat } \psi \wedge \gamma &\text{ syss } \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}\ \mathcal{H}/\mathcal{F} \text{ sat } \psi \text{ y } \Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}\ \mathcal{H}/\mathcal{F} \text{ sat } \gamma\\ &\text{ syss } D_\psi \in \mathcal{F} \text{ y } D_\gamma \in \mathcal{F} \text{ (por supuesto inductivo)}\\ &\text{ syss } D_\psi \cap D_\gamma \in \mathcal{F} \text{ (pues } \mathcal{F} \text{ es filtro)}\\ &\text{ syss } \{i \in I/\mathcal{A}_i\mathcal{H}_i \text{ sat } \psi \wedge \gamma\} \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

F4) Sea $\varphi \equiv \exists x\psi$ y sea $D = \{i \in I/\mathcal{A}_i\mathcal{H}_i \text{ sat } \exists x\psi\}$.
Probaremos que $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}\ \mathcal{H}/\mathcal{F}$ sat φ syss $\mathbf{D} \in \mathcal{F}$.
[⇐] Si $\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}\ \mathcal{H}/\mathcal{F}$ sat $\exists x\psi$ entonces hay un $\mathbf{b} \in \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ tal que

$$\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}\ (\mathcal{H}/\mathcal{F})_x^{\mathbf{b}/\mathcal{F}} \text{ sat } \psi$$

o, lo que equivale a esto, hay un $\mathbf{b} \in \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ tal que

$$\Pi_{i\in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}\ \mathcal{H}_x^{\mathbf{b}}/\mathcal{F} \text{ sat } \psi.$$

Sea $\mathbf{E} = \{i \in I/\mathcal{A}_i(\mathcal{H}_x^{\mathbf{b}}) \text{ sat } \psi\}$.

Por hipótesis inductiva, $\mathbf{E} \in \mathcal{F}$

$$(\mathcal{H}_x^{\mathbf{b}})_i: \quad \begin{array}{l} \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{A}_i \\ x \neq y \rightarrow ((\mathcal{H}_x^{\mathbf{b}})(y))(i) = (\mathcal{H}(y))(i) \\ x \rightarrow ((\mathcal{H}_x^{\mathbf{b}})(x))(i) = \mathbf{b}(i) \end{array}$$

es por consiguiente, $(\mathcal{H}_x^{\mathbf{b}})_i = \mathcal{H}_i^{\mathbf{b}(i)}$.

$$\mathbf{E} = \{i \in I / \mathcal{A}_i \mathcal{H}_i^{\mathbf{b}(i)} \text{ sat } \psi\} \subseteq \mathbf{D} \text{ y } \mathbf{D} \in \mathcal{F} \text{ por ser filtro.}$$

[$\Leftarrow$] Sea $\mathbf{D} \in \mathcal{F}$. Si $i \in \mathbf{D}$, entonces $\mathcal{A}_i \mathcal{H}_i$ sat $\exists x\psi$ y hay, por tanto, un $\mathbf{b}(i) \in \mathbf{A}_i$ tal que $\mathcal{A}_i \mathcal{H}_i^{\mathbf{b}(i)}$ sat ψ. Por el axioma de elección, existe un $\mathbf{c} \in \Pi_{i \in I}\mathbf{A}_i$ tal que $\mathbf{c}(i) = \mathbf{b}(i)$ para cada $i \in \mathbf{D}$ y $\mathbf{c}(i)$ es un elemento arbitrario de $\mathbf{A}_i$ en los demás casos.

$$\mathbf{D} \subseteq \{i \in I / \mathcal{A}_i(\mathcal{H}_x^{\mathbf{c}}) \text{ sat } \psi\} \in \mathcal{F} \text{ (pues } \mathbf{D} \in \mathcal{F}).$$

Por consiguiente, por el supuesto inductivo,

$$\Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \ \mathcal{H}_x^{\mathbf{c}}/\mathcal{F} \text{ sat } \psi$$

y en consecuencia, $\Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \ \mathcal{H}/\mathcal{F}$ sat $\exists x\psi$. ■

4.3.2. *Corolario*

Si φ es una sentencia de L, y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro,

$$\Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F} \text{ sat } \varphi \text{ syss } \{i \in I / \mathcal{A}_i \text{ sat } \varphi\} \in \mathcal{F}$$

—Intuitivamente este corolario afirma que la sentencia φ es verdadera en el ultraproducto, si lo es en «casi todos los factores» del mismo—. ■

4.3.3. *Corolario*

Si φ es una fórmula de L con a lo sumo $x_1, \ldots, x_n$ libres y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro, entonces para cada $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in \Pi_{i \in I}\mathbf{A}_i$:

$$\Pi_{i \in I}\mathcal{A}_i/\mathcal{F}[\mathbf{b}_1/\mathcal{F} \ldots \mathbf{b}_n/\mathcal{F}] \text{ sat } \varphi \text{ syss } \{i \in I / \mathcal{A}_i[\mathbf{b}_1(i) \ldots \mathbf{b}_n(i)] \text{ sat } \varphi\} \in \mathcal{F}. \ ■$$

4.4. Teorema de Compacidad

Sea Σ un conjunto de sentencias de L. Cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo syss Σ tiene un modelo.

Demostración

[⇐] Está claro que si el conjunto Σ tiene un modelo, todos sus subconjuntos lo tendrán.

[⇒] Supongamos que cada subconjunto finito de Σ tenga un modelo. Vamos a construir un ultraproducto de dichos modelos. Eligiendo con cuidado el ultrafiltro, podremos conseguir que el ultraproducto que construyamos sea modelo de Σ.

Sea $I = S_\omega(\Sigma)$; es decir, como conjunto de índices cogemos el de los subconjuntos finitos de Σ. Este es un conjunto de índices muy adecuado para nuestro caso porque nuestra hipótesis es que cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo. Es decir, para cada $\Delta \in I$ hay un $\mathscr{A}_\Delta$ tal que $\mathscr{A}_\Delta$ es modelo de Δ.

Ahora necesitamos un ultrafiltro adecuado. Para ello nos basta con encontrar una colección de subconjuntos de I que tenga la propiedad de las intersecciones finitas pues sabemos, por el Corolario del Teorema de Ultrafiltro, que una colección de conjuntos que tenga la PIF puede extenderse a un ultrafiltro.

Para cada $\Delta \in I$ sea $\Delta^* = \{\Delta' \in I / \Delta \subseteq \Delta'\}$. Δ^* no es vacío y además $\{\Delta^* / \Delta \in I\}$ tiene la propiedad de las intersecciones finitas. En efecto, sea

$$\{\Delta_1^*, \ldots, \Delta_n^*\} \subseteq \{\Delta^* / \Delta \in I\},$$

por su definición,

$$\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \in \Delta_1^* \cap \ldots \cap \Delta_n^*$$

y por consiguiente no es vacía la intersección.

Sea $\mathscr{F}$ un ultrafiltro sobre I tal que $\{\Delta^* / \Delta \in I\} \subseteq \mathscr{F}$ —existe por un corolario del teorema del Ultrafiltro—.

4.4.1. *Proposición:* $\Pi_{\Delta \in I} \mathscr{A}_\Delta / \mathscr{F}$ es modelo de Σ.

En efecto, sea $\varphi \in \Sigma$.

$\Delta_0 = \{\varphi\} \in I$. $\mathscr{A}_{\Delta_0}$ sat φ y además, si $\Delta_0 \subseteq \Delta' \in I$ entonces $\mathscr{A}_{\Delta'}$ sat φ. Por consiguiente,

$$\Delta_0^* = \{\Delta' \in I / \Delta_0 \subseteq \Delta'\} \subseteq \{\Delta' \in I / \mathscr{A}_{\Delta'} \text{ sat } \varphi\}.$$

Como $\Delta_0^* \in \mathscr{F}$ y $\mathscr{F}$ es filtro, $\{\Delta' \in I / \mathscr{A}_{\Delta'} \text{ sat } \varphi\} \in \mathscr{F}$. Por el corolario del teorema de Łoś, $\Pi_{\Delta \in I} \mathscr{A}_\Delta / \mathscr{F}$ sat φ.

Hemos, pues, demostrado la proposición y con esto termina el teorema de Compacidad. ■

Problema 11

Sea $\mathscr{F}$ el filtro $\{I\}$.

¿Es $\Pi_{i \in I} \mathscr{A}_i / \mathscr{F} \cong \langle \Pi_{i \in I} \mathbf{A}_i, \mathbf{R}_{\mathscr{F}} \rangle$?

5. APENDICE: FILTROS Y ULTRAFILTROS

Definiré las nociones de filtro y ultrafiltro y demostraré que todo filtro puede extenderse a un ultrafiltro. Para ello se necesita el Lema de Zorn, que es equivalente, como sabeis, al Axioma de elección.

Dado un conjunto I no vacío, a ciertos subconjuntos de $\mathcal{P}I$ —el conjunto de todos los subconjuntos de I— los llamamos filtros sobre I. La idea es que un filtro sobre I sea una colección de subconjuntos «grandotes» de I, entre los que se incluye el propio I.

5.1. Definición

Un filtro $\mathcal{F}$ sobre I es un subconjunto de $\mathcal{P}I$ tal que:

i) $I \in \mathcal{F}$.

ii) Si $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{F}$ entonces $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \in \mathcal{F}$.

iii) Si $\mathbf{X} \in \mathcal{F}$ y $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq I$ entonces $\mathbf{Z} \in \mathcal{F}$. □

Ejemplos

1) $\mathcal{F} = \{I\}$ es un filtro, trivial, sobre I.

2) $\mathcal{F} = \mathcal{P}I$ es también un filtro, impropio, sobre I. Naturalmente, un filtro propio sobre I será un filtro $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}I$.

3) Para cada $\mathbf{Y} \subseteq I$, $\mathcal{F} = \{\mathbf{X} \subseteq I / \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}\}$ es un filtro, el filtro generado por $\mathbf{Y}$. En especial, si $i \in \mathrm{I}$, $\mathcal{F}_i = \{\mathbf{W} \subseteq \mathrm{I} / i \in \mathbf{W}\}$ es el filtro generado por $\{i\}$. A los filtros generados por clases unitarias se les llama principales.

4) Similar a la construcción anterior, pero más general. Para cada $\mathbf{E} \subseteq \mathcal{P}I$,

$$\mathcal{F} = \bigcap \{\mathbf{F} \subseteq \mathcal{P}I / \mathbf{E} \subseteq \mathbf{F} \text{ y } \mathbf{F} \text{ es filtro sobre } I\},$$

es un filtro sobre I al que también se le denomina filtro generado por $\mathbf{E}$.

En realidad, para cada $\mathbf{Y} \subseteq I$,

$$\{\mathbf{X} \subseteq I / \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}\} = \bigcap \{\mathbf{F} \subseteq \mathcal{P}I / \{\mathbf{Y}\} \subseteq \mathbf{F} \text{ y } \mathbf{F} \text{ es filtro sobre } I\}$$

es decir, el filtro generado por $\mathbf{Y}$ en el sentido del ejemplo 3) es también el filtro generado por $\{\mathbf{Y}\}$ en este nuevo sentido.

5) También es un filtro sobre I el conjunto de todos los subconjuntos cofinitos de I. Es decir,

$$\mathfrak{F} = \{\mathbf{X} \in \mathcal{P}I / I - \mathbf{X} \text{ es finito}\}.$$

5.3. Definición

Sea $\mathfrak{F}$ un filtro sobre I. $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro syss para cada $\mathbf{X} \subseteq I$, o bien $\mathbf{X} \in \mathfrak{F}$ o bien $\mathbf{I} - \mathbf{X} \in \mathfrak{F}$, pero no ambos. □

El filtro $\mathfrak{F}_i$ del ejemplo 3) es además ultrafiltro.

5.4. Lema de Zorn

Si $\mathbf{X}$ es un conjunto parcialmente ordenado en el que cada cadena tiene cota superior, entonces $\mathbf{X}$ tiene un elemento maximal.

Como se recordará, un conjunto parcialmente ordenado es un sistema $\langle \mathbf{X}, \leq \rangle$ con una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. El orden es lineal cuando la relación está además conectada en $\mathbf{X}$. Por otra parte, si $\langle \mathbf{X}, \leq \rangle$ es orden parcial, una cadena en $\mathbf{X}$ es un subconjunto $\mathbf{A}$ de $\mathbf{X}$ completamente ordenado por $\leq$.

Dado un conjunto ordenado $\langle \mathbf{X}, \leq \rangle$ y un subconjunto $\mathbf{A}$ de él, decimos que $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ es cota superior de $\mathbf{A}$ syss todos los elementos de $\mathbf{A}$ son menores o iguales que él. Decimos que $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ es elemento maximal de $\mathbf{X}$ syss no hay ningún $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$ que no sea él mismo tal que $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$.

5.5. Definición

Sea $\mathbf{E} \subseteq \mathcal{P}I$. Decimos que $\mathbf{E}$ tiene la propiedad de las intersecciones finitas (abreviadamente, PIF) syss cada subconjunto finito de $\mathbf{E}$ tiene intersección no vacía; es decir, siempre que $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{E}$, $\mathbf{G}$ finito, $\bigcap \mathbf{G} \neq \varnothing$. □

5.6. Lema

Si $\mathbf{D} \subseteq \mathfrak{F}$ siendo $\mathfrak{F}$ un filtro propio, entonces $\mathbf{D}$ tiene la PIF.

En efecto, $\mathfrak{F}$ tiene la PIF, pues si $\mathbf{G} \subseteq \mathfrak{F}$ y $\mathbf{G}$ es finito, entonces $\bigcap \mathbf{G} \in \mathfrak{F}$ y siendo $\mathfrak{F}$ propio, $\bigcap \mathbf{G} \neq \varnothing$ (pues en el momento es que $\varnothing \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F} = \mathcal{P}I$ por ser $\mathfrak{F}$ filtro).

Ahora bien, si $\mathfrak{F}$ tiene la PIF, cualquier subconjunto de $\mathfrak{F}$ la tendrá también. ■

5.7. Lema

Si $\mathbf{D} \subseteq \mathcal{P}I$ tiene la PIF, entonces el filtro generado por $\mathbf{D}$,

$$\mathfrak{F} = \bigcap \{\mathbf{F} \subseteq \mathcal{P}I / \mathbf{D} \subseteq \mathbf{F} \text{ y } \mathbf{F} \text{ filtro sobre } I\},$$

es propio.

En efecto, si $\mathcal{F} = \mathcal{P}I$ esto querrá decir que $\varnothing \in \mathcal{F}$. Pero entonces para todo filtro **F** sobre **I** tal que $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{F}$ tendríamos que $\varnothing \in \mathbf{F}$. Esto es imposible, pues en el filtro

$$\{\mathbf{X} \in \mathcal{P}I / \mathbf{X} = I \vee \exists \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n \in \mathbf{D} : \mathbf{Y}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{Y}_n \subseteq \mathbf{X}\}$$

no está $\varnothing$ y él es uno de los filtros cuya gran intersección es $\mathcal{F}$. ■

5.8. Teorema del Ultrafiltro

Cada filtro propio puede extenderse a un ultrafiltro.

Demostración

Sea $\mathcal{F}$ un filtro propio sobre I; es decir, $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}I$.

5.8.1. *Proposición:* Si $\mathcal{C}$ es una cadena de filtros propios sobre I, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es también un filtro propio sobre I.

En efecto,

1) $I \in \bigcup \mathcal{C}$ pues para cada $\mathbf{F} \in \mathcal{C}$, $I \in \mathbf{F}$ por ser un conjunto de filtros.

2) Si $\mathbf{X} \in \bigcup \mathcal{C}$ y $\mathbf{Y} \in \bigcup \mathcal{C}$ entonces $\mathbf{X} \in \mathbf{F}$ e $\mathbf{Y} \in \mathbf{G}$, con $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathcal{C}$.
Pero como $\mathcal{C}$ es cadena —ordenada por inclusión— entonces, o bien $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{F}$ o $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{G}$. Luego $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \in \mathbf{F}$ o $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \in \mathbf{G}$ por ser ambos filtros. Por tanto, $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \in \bigcup \mathcal{C}$.

3) Si $\mathbf{X} \in \bigcup \mathcal{C}$, $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq I$, entonces $\mathbf{X} \in \mathbf{F}$ con $\mathbf{F} \in \mathcal{C}$. Por tanto, $\mathbf{Z} \in \mathbf{F}$ por ser éste filtro. La consecuencia es que $\mathbf{Z} \in \bigcup \mathcal{C}$.
Además, $\varnothing \notin \bigcup \mathcal{C}$ pues para cada $\mathbf{F} \in \mathcal{C}$, $\varnothing \notin \mathbf{F}$. Con esto se prueba que $\bigcup \mathcal{C} \neq \mathcal{P}I$ y que por tanto es filtro propio.

5.8.2. *Proposición:* Si $\mathcal{C}$ es una cadena de filtros propios sobre I, cada uno de los cuales contiene a $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

Es obvio que si para cada $\mathbf{F} \in \mathcal{C}$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{F}$, entonces $\mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

5.8.3. *Proposición:* Si $\mathcal{E}$ es la clase formada por todos los filtros propios sobre I que contienen a $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{E}$ tiene un elemento maximal.

En efecto, $\mathcal{E}$ es una clase parcialmente ordenada —por inclusión—: sabemos que cada cadena $\mathcal{C}$ en $\mathcal{E}$, tiene cota superior: $\bigcup \mathcal{C}$. Aplicando el lema de Zorn concluimos que $\mathcal{E}$ tiene elemento maximal.
Sea $\mathcal{H}$ un elemento maximal de $\mathcal{E}$, asegurado por el lema de Zorn.

5.8.4. *Proposición:* $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro sobre I.

En efecto, sea $\mathbf{X} \subseteq I$. Probaremos que $\mathbf{X} \notin \mathcal{H}$ syss $I - \mathbf{X} \in \mathcal{H}$. En primer lugar, si $I - \mathbf{X} \in \mathbf{H}$, entonces $\mathbf{X} \notin \mathcal{H}$ (pues si $\mathbf{X} \in \mathcal{H}$, por ser $\mathcal{H}$ un filtro, $\mathbf{X} \cap (I - \mathbf{X}) \in \mathcal{H}$ con lo cual $\mathcal{H}$ no sería propio: $\mathcal{H} = \mathcal{P}I$).

Ahora veremos que si $\mathbf{X} \notin \mathcal{H}$, entonces $I - \mathbf{X} \in \mathcal{H}$. Supongamos que $I - \mathbf{X} \notin \mathcal{H}$. Sea $\mathbf{J} = \mathcal{H} \cup \{\mathbf{X}\}$ y sea $\mathcal{K}$ el filtro generado por $\mathbf{J}$. Vamos a demostrar que en ese caso, $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ y por tanto $\mathbf{X} \in \mathcal{H}$. Para ello veremos que $\mathcal{K}$ es un filtro propio y que $\mathcal{H}$ es un subconjunto de $\mathcal{K}$. (Pues siendo $\mathcal{H}$ un filtro maximal de $\mathcal{E}$, si $\mathcal{K} \in \mathcal{E}$ y $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$ entonces $\mathcal{H} = \mathcal{K}$).

Veamos que $\mathcal{K}$ es un filtro propio. Que es un filtro ya lo sabemos. Para ver que es propio veamos que $\varnothing \notin \mathcal{K}$. Los elementos de $\mathcal{K}$ son, o bien el propio $\mathbf{I}$ o bien, subconjuntos de I que contienen intersecciones finitas de elementos de $\mathbf{J}$.

Sea $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n \in \mathbf{J}$ y sea $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{Y}_n$. Puesto que $\mathcal{H}$ está cerrado bajo intersecciones finitas, o bien $\mathbf{Z} \in \mathcal{H}$ o bien $\mathbf{Z} = \mathbf{Y} \cap \mathbf{X}$ para algún $\mathbf{Y} \in \mathcal{H}$. En el primer caso, $\mathbf{Z} \neq \varnothing$ por ser $\mathcal{H}$ ultrafiltro. En el segundo caso $\mathbf{Z} \neq \varnothing$ pues si $\mathbf{Z} = \varnothing$ entonces $\mathbf{Y} \subseteq I - \mathbf{X}$ y por tanto $I - \mathbf{X} \in \mathcal{H}$ en contra de nuestro supuesto.

Hemos visto que $\mathcal{K}$ es un filtro propio. Está claro que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{K}$, pues $\mathcal{K}$ está generado precisamente por $\mathcal{H} \cup \{\mathbf{X}\}$. Conclusión $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ (pues $\mathcal{K} \in \mathcal{E}$ al ser propio e incluir a $\mathcal{H} \cup \{\mathbf{X}\}$. Conclusión $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ (pues $\mathcal{K} \in \mathcal{E}$ al ser propio e incluir a $\mathcal{H}$ que a su vez incluía a $\mathcal{F}$).

Con esto termina la demostración de que $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro sobre I y por consiguiente, también la del teorema de Ultrafiltro. ■

5.9. Corolario

Si $\mathbf{D}$ es una colección de subconjuntos de I que tiene la PIF, entonces $\mathbf{D}$ puede extenderse a un ultrafiltro.

5.10. *Ejercicio*

Demostrad que, de hecho,

$$\bigcap \{\mathbf{F} \subseteq \mathcal{P}I / \mathbf{D} \subseteq \mathbf{F} \text{ y } \mathbf{F} \text{ filtro sobre } I\} =$$
$$= \{\mathbf{X} \in \mathcal{P}I / \mathbf{X} = I \vee \exists\, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n \in \mathbf{D}\colon \mathbf{Y}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{Y}_n \subseteq \mathbf{X}\}$$

Capítulo VI
LOS TEOREMAS DE LÖWENHEIM-SKOLEM Y SUS CONSECUENCIAS

INTRODUCCION

En 1915 Löwenheim demostró que si una fórmula es satisfacible, entonces tiene un modelo numerable. Los diversos enunciados de los teoremas de Löwenheim-Skolem que aparecen en este capítulo son reforzamientos sucesivos de este teorema inicial. Muchos de estos teoremas fueron demostrados antes de que la Teoría de Modelos adquiriera carta de ciudadanía y por procedimientos muy distintos a los que fueron habituales después. Las pruebas que ofrezco son, con pequeñas modificaciones, las de Tarski-Vaught de 1956, aparecidas bajo el título: «Arithmetical Extensions of Relational Systems».

El hito más importante en el desarrollo de los teoremas de Löwenheim-Skolem se produce, sin lugar a dudas, con Skolem cuando prueba que todo conjunto satisfacible de sentencias tiene un modelo numerable y aplica este resultado a la obtención de modelos no estándar. Su demostración se basa en la reducción de las fórmulas a una forma determinada, denominada en su honor «forma normal de Skolem», y en la definición de unas determinadas funciones asociadas a las fórmulas, que también han tomado su nombre. Nosotros no seguiremos el procedimiento de Skolem para demostrar este teorema pues habremos demostrado con anterioridad versiones más potentes de las que se seguirá como corolario.

Según parece, aunque el trabajo de Skolem está trazado con gran inteligencia, sus motivaciones eran bastante curiosas: disentía del tratamiento formal de la lógica pues desconfiaba de los cálculos deductivos, no le satisfacía la Teoría de conjuntos como fundamento de la matemática y echaba pestes del axioma de elección:

> «...the axiom of choice is, in my opinion, definitely
> indesirable, —a kind of scientific fraud—...»

Skolem propugnaba un tratamiento finitista de la matemática y en gran parte su

trabajo tenía la finalidad de desviar la corriente formalista de su época, mostrando los desastres y a los que conducía: modelos «indeseables», paradojas. Aunque evidentemente no triunfo, dejó una impronta negativa en sus teoremas que yo considero injusta, inadecuada. El que no triunfara en su empeño de frenar la corriente formalista es obvio, ¡ironías del destino!: dio por el contrario pie al nacimiento y posterior desarrollo meteórico de la Teoría de Modelos y a teoremas tan poco de su agrado como el denominado (¿en su honor?) Upward-Löwenheim-Skolem, que demostró Tarski, y que potencia modelos de cardinalidades transfinitas. Por lo que respecta al sello negativo que sus teoremas exhiben, basta pensar en la belleza y utilidad del Análisis no estándar para quitárselo en seguida, o cuanto menos ponerlo en el otro platillo de la balanza.

Tarski y Vaught demostraron las extensiones de los teoremas de Skolem conocidas como Downward Löwenheim-Skolem y Upward Löwenheim-Skolem pero como la historia es tan injusta, sólo ocasionalmente aparecen estos teoremas nombrados con un Tarski añadido al final. Y lo que es aún más gracioso, se cuenta que hubo quien expresó su deseo de conocer y felicitar al eminente profesor Downward en medio de una reunión a la que asistía Tarski (dicen que el «inocente» era un eminente profesor oriental, que entonces no debía saber mucho inglés).

Las consecuencias de los teoremas de Löwenheim-Skolem son enormes. Por ejemplo, no hay teorías categóricas con modelos infinitos pues al existir siempre modelos de distintas cardinalidades, no puede haber isomorfía entre ellos. Además, puesto que siempre que un conjunto de sentencias de un lenguaje numerable tiene un modelo, tiene también un modelo numerable, en primer orden no se puede distinguir entre distintas cardinalidades infinitas, como, por ejemplo, la de los naturales y la de los reales. Pero de su «impotencia» expresiva nace la fecundidad: al ser el lenguaje de primer orden incapaz de caracterizar hasta isomorfía la teoría de los naturales o la de los reales, origina modelos no estándar: modelos no isomorfos al propuesto pero en los que son verdaderas las mismas sentencias. En el caso concreto del Algebra de los reales surge una nueva disciplina: el denominado Análisis no estándar. Los infinitesimales de Leibniz se instalan formando mónadas en estos modelos del Análisis, permitiéndonos una notación simplificada de conceptos tan clave como lo es el de convergencia, las pruebas de teoremas clásicos del Análisis ganan en sencillez y belleza y se resuelven problemas de Análisis pendientes desde hacía años.

Cuando se evidencia la falta de poder expresivo de la Lógica de primer orden es natural investigar otros lenguajes más potentes. En la década de los 60 se introdujeron muchos lenguajes cuya potencia expresiva se sitúa entre los de primero y segundo orden. En todos los casos se intentaba formular y demostrar los teoremas de completud, compacidad y Löwenheim-Skolem constatándose que nunca se verificaban simultáneamente. Esto no podía ser de otro modo pues, según mostró Linström en el 1971, el lenguaje de primer orden es el más expresivo de los lenguajes que verifican simultáneamente completud, compacidad y Löwenheim-Skolem. Esto quiere decir que si buscamos un lenguaje más expresivo que el de primer orden hemos de estar dispuestos a prescindir del cálculo, o de la compacidad, por ejemplo.

En este libro no abordaremos el estudio de lenguajes más expresivos que el de primer orden, aunque considero que es fundamental y que en una Licenciatura de Lógica no debe quedar como asignatura pendiente.

1. ORGANIZACION DEL CAPITULO

En el apartado primero de este capítulo demostraremos las diversas versiones de los teoremas que establecen la existencia de modelos no estándar. Estudiaremos con cierto detalle cómo son los modelos no estándar de los naturales y de los reales, en apartados sucesivos, para finalizar analizando la denominada Paradoja de Skolem, que plantea la diferencia de interpretación existente entre «la realidad» y los modelos.

Teorema: Downward Löwenheim-Skolem (1956)
Dado un $\mathscr{A}$ hay otro $\mathscr{B}$ tal que $\mathscr{B} < \mathscr{A}$ (con ciertas restriccios)
↓
Corolario: Löwenheim-Skolem
↓
Corolario: Skolem (1920)
↓
Corolario: Löwenheim (1915)
→ Corolario: La Teoría de los reales tiene un modelo numerable.
→ Corolario: Zermelo-Fraenkel tiene un modelo numerable (con ciertas condiciones).

Teorema: Upward Löwenheim-Skolem (1956)
Dado un $\mathscr{A}$ hay otro $\mathscr{B}$ tal que $\mathscr{A} < \mathscr{B}$ (con ciertas restricciones)
↓
Corolario: Upward Löwenheim-Skolem (1928).
→ Modelos no estándar.
→ Paradoja de Skolem.

En el capítulo VII demostraremos el test de Vaught de completud de teorías, que es una consecuencia bastante inmediata de los teoremas de este capítulo. Es asimismo una consecuencia de los teoremas que se demostrarán en este capítulo el test de decibilidad de teorías que determina condiciones suficientes para que una teoría sea decidible.

Las flechas del organigrama indican los itinerarios que hemos seguido en este capítulo para demostrar los teoremas. Por supuesto, también hemos utilizado resultados anteriores, como Compacidad, y condiciones alternativas de la relación $<$. Es evidente que los itinerarios no son los que corresponden al desarrollo histórico, pues Löwenheim en 1915 no pudo utilizar el teorema que en 1956 demostraron Tarski y Vaught.

No he incluido ninguno de los teoremas que prueban la equivalencia de cualquiera de las versiones fuertes de Löwenheim-Skolem con el axioma de elección, si estais interesados en ella, consultad el libro de Bell-Slomson*.

---

* Models and Ultraproducts.

2. LOS TEOREMAS DE LÖWENHEIM-SKOLEM

En su forma más general los teoremas de Löwenheim-Skolem contestan a las cuestiones siguientes: Dado un sistema $\mathcal{A}$ de cardinalidad α (en qué cardinalidades β encontramos sistemas $\mathcal{B}$ tales que $\mathcal{B} < \mathcal{A}$. ¿En cuáles, sistemas tales que $\mathcal{A} < \mathcal{B}$?

En lo que sigue contaremos con un lenguaje L de primer orden de cardinalidad ϱ. El primero de los teoremas que probaremos dice que siempre que tengamos un sistema $\mathcal{A}$, cuyo universo tenga cardinalidad $\alpha \geqslant \omega$ y un subconjunto suyo **C** de cardinalidad γ, para cada cardinal β entre γ y α se puede encontrar un sistema $\mathcal{B}$ cuyo universo contenga a **C** y sea de cardinalidad β tal que $\mathcal{B}$ sea un subsistema elemental de $\mathcal{A}$. Por consiguiente, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ serán indistinguibles en primer orden, incluso considerando fórmulas abiertas.

2.1. Teorema: Downward Löwenheim-Skolem (Tarski y Vaught, 1956)

Sea L un lenguaje de cardinalidad ϱ. Para cada $\mathcal{A}$ de cardinalidad α, cada subconjunto $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}$ de cardinalidad γ y cada cardinal β tal que $\gamma, \varrho \leqslant \beta \leqslant \alpha$, hay un $\mathcal{B}$ de cardinalidad β tal que $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B}$ y $\mathcal{B} < \mathcal{A}$.

Demostración

Sea $\leqslant$ un buen orden para **A**, que sabemos que existe por el axioma de elección. Formemos una cadena numerable de subconjuntos de $\mathbf{A}(\mathbf{B}_0 \subseteq \mathbf{B}_1 \subseteq \mathbf{B}_2 \ldots)$ con las siguientes características:

i) $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B}_0$ es cualquiera de los subconjuntos de **A** de cardinalidad β que contiene a **C**. Sea $\bar{\mathbf{b}}^0 = \langle \mathbf{b}_k^0 \rangle_{k<\beta}$ una enumeración de $\mathbf{B}_0$ extraída de la ordenación de **A**.

ii) Cada subconjunto $\mathbf{B}_n$ tiene cardinalidad β. Sea $\bar{\mathbf{b}}^n = \langle \mathbf{b}_k^n \rangle_{k<\beta}$ una enumeración de $\mathbf{B}_n$, extraída de la ordenación de **A**.

iii) Supuesto definido $\mathbf{B}_n$ formamos $\mathbf{B}_{n+1}$ de la siguiente manera: A cada sentencia $\exists x \varphi(x)$ de L $(\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{b}}^n \rangle)$ tal que $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{b}}^n \rangle$ sea modelo suyo le corresponde el conjunto

$$\{\mathbf{a} \in \mathbf{A} \mid \langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{b}}^n \rangle[\mathbf{a}] \text{ sat } \varphi\}$$

De dicho conjunto, que es naturalmente un subconjunto de **A**, nos quedamos con el primer elemento, que evidentemente existe por ser $\leqslant$ un buen orden.

2.1.1. *Proposición:* $\mathbf{B}_0 \subseteq \mathbf{B}_1 \subseteq \mathbf{B}_2 \ldots$ y cada $\mathbf{B}_n$ es de cardinalidad β.

En efecto, sea $\mathbf{a} \in \mathbf{B}_n$. Por ser $\bar{\mathbf{b}}^n$ una ordenación de $\mathbf{B}_n$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}_k^n$ para un cierto $k < \beta$. En el lenguaje L $(\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{b}}^n \rangle)$ le corresponde una cierta constante, c_k^n. Evidentemente

la fórmula $\exists x\, c_k^n = x$ es verdadera en $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{b}}^n \rangle$. Puesto que $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{b}}^n \rangle[\mathbf{b}_k^n]$ sat $c_k^n = x$ y es el único elemento de **A** que satisface esta fórmula, $\mathbf{a} = \mathbf{b}_k^n$, $\mathbf{b}_k^n \in \mathbf{B}_{n+1}$.

Además, cada $\mathbf{B}_n$ tiene cardinalidad β ya que $\mathbf{B}_0$ tenía cardinalidad β y hay sólo $\varrho \leq \beta$ fórmulas en L.

2.1.2. *Proposición:* $\mathcal{A} \mid \mathbf{B}$ donde $\mathbf{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{B}_n$ es el sistema que buscamos.

En primer lugar, tenemos que demostrar que $\mathcal{A} \mid \mathbf{B}$ es un sistema. Según el Problema 1 de I lo único que hace falta es demostrar que $\mathrm{Rec}(\mathbf{f}_i \mid \mathbf{B}^{\mu(i)}) \subseteq \mathbf{B}$, para cada función $\mathbf{f}_i$ de $\mathcal{A}$.

Sea $\mathbf{a} \in \mathrm{Rec}\,(\mathbf{f}_i \mid \mathbf{B}^{\mu(i)})$; es decir,

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{\mu(i)}) = \mathbf{a} \text{ para } \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{\mu(i)} \in \mathbf{B}.$$

Por ser **B** la gran unión de una cadena, todos estos elementos de **B** estarán en alguno de los eslabones, digamos que en $\mathbf{B}_n$.

Puesto que $\bar{\mathbf{b}}^n$ es una enumeración de $\mathbf{B}_n$, los $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{\mu(i)}$ estarán en ella siendo los $\mathbf{b}_{S_1}^n, \ldots, \mathbf{b}_{S_{\mu(i)}}^n$ y en el lenguaje $L(\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{b}}^n \rangle)$ tendrán nombres: $c_{S_1}^n, \ldots, c_{S_{\mu(i)}}^n$.

Evidentemente $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{b}}^n \rangle$ es modelo de la sentencia

$$\psi = \exists z\, f_i c_{S_1}^n, \ldots, c_{S_{\mu(i)}}^n = z$$

Además $\mathbf{a} \in \{\mathbf{b} \in \mathbf{A} \,/\, \langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{b}}^n \rangle[\mathbf{b}] \text{ sat } f_i c_{S_1}^n, \ldots, c_{S_{\mu(i)}}^n = z\}$ y es el único elemento de ese conjunto, por ser $\mathbf{f}_i$ una función. Necesariamente, pues, $\mathbf{a} \in \mathbf{B}_{n+1} \subseteq \mathbf{B}$.

También sabemos, por el Problema 1 de I, que $\mathcal{A} \mid \mathbf{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$.

Además, **B** es de cardinalidad β pues es la unión numerable de conjuntos de cardinalidad $\beta \geq \omega$. Puesto que $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, $\beta \leq \alpha$.

Demostremos por último que $\mathcal{A} \mid \mathbf{B} < \mathcal{A}$. Para ello utilizaremos IV.2.4.

Sea $\varphi\ \langle y_1, \ldots, y_p, x \rangle \in \mathrm{FOR(L)}$, $\mathcal{I}\colon \mathcal{V} \to \mathbf{B}$ y supongamos que $\mathcal{A}\mathcal{I}$ sat $\exists x\varphi$. Queremos demostrar que hay un $\mathbf{a} \in \mathbf{B}$ tal que $\mathcal{A}\mathcal{I}_x^{\mathbf{a}}$ sat φ.

Por ser **B** la unión de una cadena, todos los $\mathcal{I}(y_i)$ estarán en algún $\mathbf{B}_m$, ocuparán lugar propio en la ordenación $\bar{\mathbf{b}}^m$ y tendrán nombre en el lenguaje $L(\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{b}}^n \rangle)$: sean $\mathbf{b}_{r_1}^m, \ldots, \mathbf{b}_{r_p}^m$ los elementos de $\mathbf{B}_m$ correspondientes y sean las $c_{r_1}^m, \ldots, c_{r_p}^m$ sus nombres. Evidentemente,

$$\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{b}}^m \rangle \text{ sat } \exists x\, \mathbf{S}_{y_1 \ldots y_p}^{c_{r_1}^m \ldots c_{r_p}^m}\, \varphi$$

Sea $\mathbf{a}$ el primer elemento del conjunto

$$\{\mathbf{b} \in \mathbf{A} \,/\, \langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{b}}^m \rangle[\mathbf{b}] \text{ sat } \mathbf{S}_{y_1 \ldots y_p}^{c_{r_1}^m \ldots c_{r_p}^m}\, \varphi\}\,.$$

Obviamente $\mathbf{a} \in \mathbf{B}_{m+1} \subseteq \mathbf{B}$ y se verifica $\mathcal{A}\mathcal{I}_x^{\mathbf{a}}$ sat φ. ■

2.7. Teorema: Upward Löwenheim-Skolem (Tarski y Vaught, 1956)

Sea L de cardinalidad ϱ. Para cada $\mathcal{A}$ de cardinalidad $\alpha \geqslant \omega$ y cada cardinal $\beta \geqslant \alpha, \varrho$ hay un $\mathcal{B}$ de cardinalidad β tal que $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

Demostración

Sea $\beta \geqslant \alpha, \varrho$. Sea $\bar{\mathbf{a}}$ una enumeración sin repeticiones de $\mathbf{A}$ y sea $\langle c_k \rangle_{k<\beta}$, una familia de constantes nuevas, que no están en el lenguaje $L(\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle)$.

En el lenguaje $L(\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle) \cup \langle c_k \rangle_{k<\beta}$ consideremos el conjunto de sentencias siguiente:

$$\Gamma = \mathrm{TEO}(\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle) \cup \{\neg\, c_\zeta = c_\delta / \zeta < \delta < \beta\}$$

2.7.1. *Proposición:* Γ tiene un modelo.

Haremos la demostración utilizando el teorema de compacidad. Sea $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ un subconjunto finito. En Γ_0 sólo pueden aparecer constantes nuevas en número finito; sean $c_{\zeta_1}, \ldots, c_{\zeta_r}$ las nuevas constantes que están en Γ_0.

Sean $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ elementos distintos de $\mathbf{A}$ y definamos una enumeración $\bar{\mathbf{a}}'' = \langle \mathbf{a}''_k \rangle_{k<\alpha+\beta}$ de $\mathbf{A}$, con repeticiones así:

$\mathbf{a}''_k = \mathbf{a}_k$ para cada $k < \alpha$

$\mathbf{a}''_k = \mathbf{a}'_i$ para $k = \alpha + \zeta_i$ con $1 \leqslant i \leqslant r$

$\mathbf{a}''_k$ arbitrario, en los demás casos.

Puesto que los $\mathbf{a}'_i$ son todos distintos, $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}}'' \rangle$ es modelo de Γ_0. Y por el teorema de compacidad, Γ tendrá también un modelo. La cardinalidad de dicho modelo, al que llamaremos $\mathcal{C}$, es $\geqslant \beta$ pues las sentencias $c_\zeta \neq c_\delta$ lo exigen.

2.7.2. *Proposición:* Hay un $\mathcal{F}$ de cardinalidad $\geqslant \beta$ tal que $\mathcal{A} \prec \mathcal{F}$.

En efecto, puesto que $\mathcal{C}$ es modelo de $\mathrm{TEO}(\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle)$, se cumplirá que $\mathcal{A} \stackrel{\sim}{\prec} \mathcal{D}$ siendo $\mathcal{D}$ la reducción de $\mathcal{C}$ al lenguaje L (IV.6.7). En estas circunstancias es fácil encontrar un sistema $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{A} \prec \mathcal{F}$, (¿verdad?).

2.7.3. *Proposición:* Hay un $\mathcal{B}$ de cardinalidad β tal que $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$.

En efecto, sabemos que hay un $\mathcal{F}$ de cardinalidad $\geqslant \beta$ tal que $\mathcal{A} \prec \mathcal{F}$. Por el teorema VI.2.1 sabemos que entonces hay un $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{A} \prec \mathcal{B} \prec \mathcal{F}$ que tiene cardinalidad β. ■

2.8. Corolario: Upward Löwenheim-Skolem (Tarski 1928).

Sea Γ un conjunto de sentencias de cardinalidad γ. Si Γ tiene un modelo de cardinalidad $\alpha \geqslant \omega$, entonces para cada $\beta \geqslant \alpha, \gamma$: Γ tiene un modelo en dicha cardinalidad β. ■

2.9. Corolario

La aritmética de Peano tiene modelos no estándar. ■

2.10. *Ejercicios*

1. Demostrad los corolarios 2.2, 2.3 y 2.4.

2. Demostrad esta otra versión de 2.3:

   Si Γ es un conjunto consistente de sentencias de un lenguaje de cardinalidad ω, entonces Γ tiene un modelo numerable.
   NOTA: Para Skolem la noción de consistencia era semántica —es decir, satisfacible en un sistema— pues no pensaba que la lógica pudiera ser una ciencia axiomática. En tal tesitura, Skolem no distinguiría entre 2.3 y la versión que os acabo de proponer. Nosotros, sí, aunque sabemos que son equivalentes.

3. En el corolario 2.6 ¿estamos suponiendo algo acerca de dicha teoría?

Problema 1. Demostrad que todo conjunto puede ser linealmente ordenado.

Problema 2. Demostrad la proposición 2.7.2.

3. MODELOS NO ESTANDAR

La existencia de modelos no estándar de la Aritmética fue descubierta por Skolem en los años 30, pero durante muchos años no se les prestó demasiada atención. De hecho, hasta 1949 fueron utilizados como contraejemplos patológicos. En esta fecha Henkin demostró la completud de la Teoría de Tipos cuando aceptamos como modelos de la lógica superior a una clase de sistemas mucho más amplia, que incluye modelos no estándar. Aunque el significado de «modelos no estándar» en lógica superior y referido a la Aritmética no es el mismo, conviene saber que están íntimamente relacionados. Concretamente, al final de su artículo: «Completeness in the theory of types», Henkin construye un modelo no estándar de la Aritmética que recoge los dos aspectos; es no estándar por partida doble.

Como recordaréis en el capítulo V construimos un modelo no estándar de TEO($\mathcal{N}$); es decir, —y esto significa no estándar en este contexto—, no isomorfo a $\mathcal{N}$.

Por otra parte, en el contexto de la lógica de segundo orden, un sistema no estándar $\mathcal{A}$ está constituido por un universo al que se referirán las variables individuales y una familia $\langle \mathbf{A}_n \rangle_{n \geq 1}$ de universos relacionales al que se referirán las variables predicativas del lenguaje: cada $\mathbf{A}_n \subseteq \mathcal{P}\, \mathbf{A}^n$ y alguno de ellos no contiene a todas las posibles. Es decir, la diferencia entre sistemas estándar y no estándar de segundo orden es que en los primeros $\mathbf{A}_n = \mathcal{P}\mathbf{A}^n$, para todo n y en los segundos $\mathbf{A}_n \subseteq \mathcal{P}\mathbf{A}^n$ y alguno de ellos es propio: $\mathbf{A}_m \neq \mathcal{P}\mathbf{A}^m$, para algún m.

¿Recordáis el modelo no estándar de V.3.7? El modelo $\mathcal{M}$ tenía un universo $\mathbf{M}$ al que pertenecían los números estándar y al menos un $\mathbf{k}$ que no era estándar. De hecho, según veremos más adelante, contiene un número infinito de números no estándar formando lo que llamaremos $\mathfrak{X}$-cadenas.

Si sobre la base del sistema anterior construimos uno, $\mathcal{M}^*$ que sea modelo de los axiomas de Peano de segundo orden, añadiendo universos relacionales $\mathbf{M}_n \subseteq \mathcal{P}\mathbf{M}^n$ para cada n, el sistema $\mathcal{M}^*$ no será estándar en el sentido de la lógica de segundo orden. En particular, $\mathbf{M}_1 \neq \mathcal{P}\mathbf{M}$. La razón es la siguiente: Consideremos la clase formada por los números estándar, $\mathbb{N}(\mathcal{M}) = \{\mathcal{M}(c), \mathcal{M}(fc), \ldots\}$. El sistema $\mathcal{M}^*$ es modelo de los axiomas de Peano de segundo orden y en particular del axioma de inducción: $\forall Z(Zc \wedge \forall x(Zx \rightarrow Zfx) \rightarrow \forall xZx)$. Supongamos que la clase formada por los números estándar, $\mathbb{N}(\mathcal{M})$, estuviera en el universo $\mathbf{M}_1$ de $\mathcal{M}^*$. Puesto que dicho conjunto contiene al cero de $\mathcal{M}$ y al siguiente de cada uno de sus elementos, por el axioma de inducción concluimos que $\mathbf{M} = \mathbb{N}(\mathcal{M})$. Esto es falso ya que en nuestro modelo el universo contenía números no estándar. ¿Qué conclusión extraemos de todo esto? Sencillamente, que $\mathbb{N}(\mathcal{M}) \notin \mathbf{M}_1$ y que por lo tanto $\mathbf{M}_1 \neq \mathcal{P}\mathbf{M}$: no es estándar, en el sentido dado a este término en la lógica de segundo orden, el modelo $\mathcal{M}^*$.

He hecho este inciso para explicar que el término «modelo no estándar» en primero y segundo orden están relacionados, pues aunque en los años 50 y 60 todo el mundo lo tenía muy claro, ahora parece haberse olvidado.

Antes de continuar hablando de modelos no estándar en el sentido de la lógica de primer orden y, en particular, de modelos no isomorfos al arquetípico —clásico, querido o pretendido— espero no haber sembrado de confusión vuestras mentes presentando un modelo no estándar de la Aritmética de Peano de segundo orden. Pues ¿no os había dicho que la Aritmética de Peano de segundo orden es categórica?, ¿cómo puede haber un modelo no isomorfo a $\mathcal{N}$?

La Aritmética de Peano de segundo orden es una teoría categórica cuando aceptamos como sistemas adecuados para interpretar la lógica superior únicamente a los estándar: $\mathbf{A}_n = \mathcal{P}\mathbf{A}^n$ siempre. Cuando nuestra semántica deja de ser la estándar, admitimos modelos en cuyos universos relacionales no estén todas las relaciones posibles, la Aritmética de Peano deja de ser categórica.

La razón por la que la Aritmética de Peano de primer orden no es categórica es: que el conjunto de los números estándar no es definible mediante una fórmula de primer orden en un modelo con números no estándar, faltándonos inducción para ese conjunto. Esto lo demostraremos en este apartado.

La razón por la que la Aritmética de Peano de segundo orden con interpretación

estándar es categórica es porque tenemos inducción para todos los conjuntos y un sistema en cuyo universo aparecieran números no estándar no podría ser modelo del axioma de inducción de segundo orden.

Cuando estamos en segundo orden pero admitimos sistemas con universos relacionales incompletos, la cuantificación se refiere solamente a los conjuntos y relaciones que estén presentes en el sistema y muy bien podría faltar, en el caso de un sistema-modelo de los axiomas de Peano de segundo orden, el de los números estándar. Aunque nos estamos saliendo de los límites de este libro, los sistemas que Henkin introdujo en su prueba de completud de la lógica superior contenían en sus universos relacionales a todos los conjuntos y relaciones definibles en el sistema mediante fórmulas de segundo orden. Y, en el caso que nos ocupa, el de la Aritmética, el conjunto de los números estándar tampoco es definible en segundo orden en un sistema en cuyo universo haya números no estándar.

Como decía al principio, hasta 1949 a los modelos no estándar no se les prestó demasiada atención. Sin embargo, en la década de los 50 el estudio de los modelos no estándar de la Aritmetica se convirtió en una especie de moda y en el Simposio de Matemáticas de Varsovia (1959) se presentaron varios artículos sobre el tema, uno de ellos de Robinson. Las investigaciones trataban acerca de modelos de la Aritmética y el objetivo de las mismas no era el estudio de las propiedades matemáticas de los números, sino el de las propiedades metamatemáticas de los lenguajes formales y sus cálculos deductivos.

El análisis no estándar lo inventó Robinson en el otoño de 1960. En el prefacio de su libro, «Non-standard Analysis», dice que pensó que los conceptos y métodos de la Lógica Matemática podrían proporcionar un marco adecuado para desarrollar el Cálculo Diferencial e Integral por medio de números infinitamente grandes e infinitamente pequeños.

El cálculo diferencia e integral ya había sido descrito por Leibniz y Newton en el siglo XVII usando cantidades que eran infinitamente pequeñas, aunque distintas de cero. Durante el siglo XVIII se desarrolló la técnica del cálculo infinitesimal y en el XIX se consolidó en la forma que nos llega en los libros de texto, sin infinitesimales.

Pero, como dije, en 1960 Robinson creó el análisis no estándar en el que los infinitesimales reaparecen, ahora con todo el rigor y precisión exigido por los estándares modernos. La idea clave es la de aprovechar los modelos no estándar de los números reales.

¿Tiene alguna ventaja el análisis no estándar frente al estándar, aparte del histórico-sentimental de resucitar los infinitesimales de Leibniz?

Hay que decir que el Análisis no estándar, a diferencia de la Aritmética no estándar, se utiliza para probar teoremas sobre números; es decir, en investigaciones matemáticas, y no solamente en metamatemáticas. Concretamente, en 1964, Robinson y Berstein usando análisis no estándar solucionaron un problema abierto sobre espacios de Hilbert. No obstante, toda prueba realizada en análisis no estándar puede sustituirse por una estándar, pero las primeras son más sencillas que las segundas y menos artificiosas, dicen los expertos. Por consiguiente, como el propio Robinson señala, elegir análisis estándar o no es cuestión de gusto, no de necesidad.

Quien se puso decididamente a favor del Análisis no estándar fue Gödel, pronosticando que sería el análisis del futuro. Dijo también que los historiadores de la

matemática que nos sucedan considerarán una gran estupidez histórica el no haber sabido dar, 300 años antes, el paso de los reales a los infinitesimales, siendo así que éste era tan natural como el de la ampliación de los naturales a los enteros, o el de éstos a los racionales o el de los racionales a los reales.

Aunque Gödel pudiera estar exagerando, hoy nadie duda en considerar el Análisis no estándar como uno de los mayores inventos de la lógica de la segunda mitad de este siglo. Y una consecuencia muy agradable de los teoremas de Löwenheim-Skolem.

3.1. Modelos no estándar de la Aritmética de Peano

En el lenguaje $L(\mathcal{N})$ de la aritmética —es decir, el adecuado al sistema $\langle \mathbb{N}, 0, S, +, \cdot \rangle$ de los naturales, el estándar— formulamos en II.3.4 una serie de sentencias verdaderas en $\mathcal{N}$.

Llamaremos Aritmética de Peano, AP, a las consecuencias que se derivan del conjunto Σ integrado por las siguientes:

$$\alpha_1 \equiv \forall x\, c \neq fx$$

$$\alpha_2 \equiv \forall xy\, (fx = fy \rightarrow x = y)$$

$$\alpha_5 \equiv \forall x\, x + c = x$$

$$\alpha_6 \equiv \forall xy\, x + fy = f(x + y)$$

$$\alpha_7 \equiv \forall x\, x \cdot c = c$$

$$\alpha_8 \equiv \forall xy\, x \cdot fy = (x \cdot y) + x$$

y la serie infinita de las ocurrencias del axioma de inducción de primer orden, P3.

$$P3 \equiv \varphi(c) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(fx)) \rightarrow \forall x\varphi(x))$$

Es decir, $AP = CON(\Sigma)$.

Evidentemente, $\mathcal{N}$ es un modelo de Σ pues los axiomas se formularon situando al sistema estándar en el punto de mira. Por consiguiente, $AP \subseteq TEO(\mathcal{N})$, pues si $\Sigma \vDash \varphi$ entonces $\mathcal{N}$ es modelo de φ.

Sin embargo, según se desprende del Teorema de incompletud de Gödel, $AP \neq TEO(\mathcal{N})$: hay sentencias verdaderas en $\mathcal{N}$ que no pueden deducirse a partir de AP. No demostraremos en este libro el Teorema de incompletud, pues necesitaríamos Teoría de la recursión y, además, no se considera propiamente de Teoría de Modelos.

Sabed no obstante, que AP no es una teoría completa pues existen sentencias tales que $AP \nvDash \alpha$ y $AP \nvDash \neg\alpha$. En la demostración original de Gödel el carácter de α era un poco retorcido y aunque la prueba es increíblemente ingeniosa, se sale con la impresión de que la «matemática de diario» es expresable en sentencias que son todas teoremas de AP. Con posterioridad a la prueba de Gödel se han encontrado sentencias α que siendo de un carácter más llano no son empero deducibles de AP; ni α, ni $\neg\alpha$.

Ingenuamente podría pensarse que si el problema es que faltan teoremas en AP, se podrían añadir como nuevos axiomas. Desgraciadamente la Aritmática de Peano no sólo es incompleta, es también incompletable.

En este apartado veremos con cierto detalle modelos no estándar de TEO($\mathcal{N}$) que contienen a $\mathcal{N}$ como subsistema elemental. Son estos los modelos no estándar más manejables puesto que todas las fórmulas verdaderas en $\mathcal{N}$ para ciertos elementos de su universo continuarán siendo verdaderas en el no estándar para los mismos números.

Evidentemente, todo modelo de TEO($\mathcal{N}$) lo es de AP; es decir, MOD(TEO($\mathcal{N}$)) $\subseteq$ MOD(AP). Y puesto que en el capítulo V demostramos la existencia de modelos no estándar de TEO($\mathcal{N}$) (V.3.7), sabemos ya de la existencia de modelos no estándar de AP. Una manera mucho más sencilla de detectar la existencia de modelos no estándar es utilizando el corolario V.2.8.

¿Hay alguna diferencia entre los modelos de TEO($\mathcal{N}$) y los de AP? Evidentmente, al ser el primer conjunto de sentencias una teoría completa y no serlo el segundo, dos modelos cualesquiera de TEO($\mathcal{N}$) aún no siendo isomorfos, tienen que ser elementalmente equivalentes mientras que dos de AP pueden no ser ni lo uno ni lo otro. Pensad en la sentencia α de Gödel.

En lo que sigue demostraremos que TEO($\mathcal{N}$) tiene modelos no estándar de cualquier cardinalidad e investigaremos cómo son «por dentro»; muy en especial veremos cómo se ordenan los elementos en el modelo. De hecho, nos valdremos de los modelos de TEO($\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$) porque coinciden con los de TEO($\mathcal{N}$) y en ellos los hechos se ven con mayor claridad. Los modelos que analizaremos con mayor detalle contendrán al estándar como subsistema elemental, pero también estudiaremos algunas de las propiedades que se observan en modelos cualesquiera de AP.

3.1.1. *Teorema. Modelos no estándar numerables*

Hay modelos no estándar de TEO($\mathcal{N}$) que son numerables.

Demostración

Por el teorema V.3.7 sabemos que TEO($\mathcal{N}$) tiene modelos no estándar. Aquellos modelos los obtuvimos añadiendo a TEO($\mathcal{N}$) una serie de fórmulas y utilizando compacidad para demostrar que el conjunto extendido tenía necesariamente que tener un modelo. Ahora, utilizando el Corolario 2.3 (Skolem 1920), añadimos que los tiene que haber de cardinalidad ω, ya que el corolario dice que los hay numerables y nosotros sabemos que los modelos de TEO($\mathcal{N}$) son siempre infinitos. El modelo que consigamos por este procedimiento puede ser reducido a un modelo adecuado a L($\mathcal{N}$). ■

3.1.2. *Teorema. Modelos no estándar de cualquier cardinalidad $\beta \geq \omega$*

Para cada $\beta \geq \omega$, hay modelos no estándar de TEO($\mathcal{N}$).

Demostración

Por tener TEO($\mathcal{N}$) un modelo de cardinalidad ω, los tiene también de cardinalidad superior a la de ese modelo y los de distinta cardinalidad no pueden ser isomorfos. ■

3.1.3. *Teorema: Modelos no estándar de TEO($\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$)*

Hay modelos no estándar de TEO($\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$).

Demostración

Sea $\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, \cdot, <_{\mathbb{N}} \rangle$ y utilicemos el mismo signo, $<$, también en el lenguaje apropiado, L($\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$).

Os dejo como ejercicio el demostrar que TEO($\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$) tiene también modelos no estándar (es el Problema 3). ■

NOTA. Puesto que la relación de orden es definible en el sistema $\mathcal{N}$, la extensión al sistema $\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ es inesencial.

Es decir, a todo modelo de TEO($\mathcal{N}$) le corresponde uno de TEO($\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$) y viceversa.

3.1.4. *Cómo es por dentro un modelo no estándar*

Sea $\mathfrak{B}$ un modelo de cardinalidad $\beta > \omega$ tal, que $\mathcal{N} < \mathfrak{B}$. Dicho modelo existe, según se desprende de VII.2.7 (Upward Löwenheim-Skolem).

Nuestro primer objetivo va a ser el de analizar cómo se ordenan los individuos de $\mathfrak{B}$. En L($\mathcal{N}$) no tenemos signo para el orden ya que, como recordaréis, no está destacado en $\mathcal{N}$, pero se puede introducir mediante $\forall xy\ (x < y \leftrightarrow \exists z\ x + fz = y)$.

Sucede que:

1) el orden de los naturales es definible mediante esta fórmula; es decir,

$$<_{\mathbb{N}} = \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{N}^2 / \mathcal{N}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \text{ sat } \exists z\ x + fz = y\}$$

2) toda fórmula de L($\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$) verdadera en $\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ tiene una primitiva, sin $<$, que es verdadera en $\mathcal{N}$, y

3) definiendo en $\mathfrak{B}$ la relación

$$<^{\mathfrak{B}} = \{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbf{B}^2 / \mathfrak{B}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \text{ sat } \exists z\ x + fz = y\},$$

las fórmulas de L ($\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$) verdaderas en $\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ serán también verdaderas en $\langle \mathfrak{B}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$ y las primitivas lo serán en $\mathfrak{B}$.

Sean $\theta_1, \ldots, \theta_5$ las siguientes fórmulas de las de $L(\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle)$.

$$\theta_1 \equiv \forall xyz\,(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$$

$$\theta_2 \equiv \forall xy\,(x < y \vee x = y \vee y < x)$$

$$\theta_3 \equiv \forall xy\,(x < y \rightarrow \neg y < x)$$

$$\theta_4 \equiv \forall x\,(c < x \vee c = x)$$

$$\theta_5 \equiv \neg\exists x\,(f \ldots^{(n} fc < x \wedge x < f \ldots^{(n} fc)$$

Es evidente que todas estas fórmulas son verdaderas en $\langle \mathcal{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ y que sus primitivas, $\theta_1^*, \ldots, \theta_5^*$, lo son en $\mathcal{N}$. Pero si lo son en $\mathcal{N}$, siendo así que $\mathcal{N} \prec \mathfrak{B}$, también en $\mathfrak{B}$ lo han de ser. En $\langle \mathfrak{B}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$ vuelven a ser ciertas $\theta_1, \ldots, \theta_5$. ¿Son también deducibles de AP?

Pero, ¿qué dicen estas fórmulas?

3.1.4.1. *Proposición:* $\langle \mathfrak{B}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$ es un orden lineal estricto; es decir, irreflexivo.

En efecto, se sigue de θ_1, θ_2 y θ_3. ■

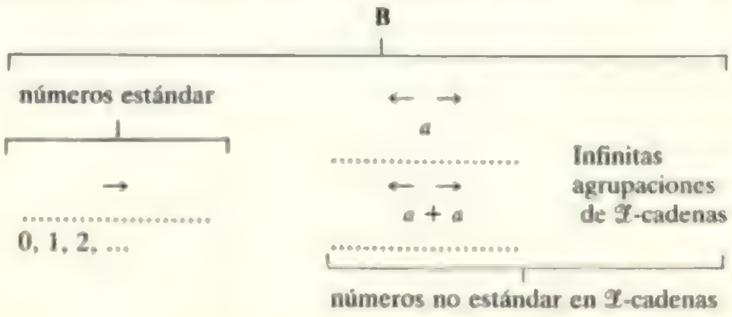
3.1.4.2. *Proposición:* $0 = \mathfrak{B}(c)$ es el primer elemento de **B**.

Se sigue de θ_4. ■

3.1.4.3. *Proposición:* Los elementos de $\mathbf{B} - \mathbb{N}$ están separados de $\mathbb{N}$.

Esta proposición, que se sigue de θ_5, se expresa diciendo que no hay números no estándar entre los números estándar. En este modelo son números estándar los naturales, $\mathbb{N}$, que integran el conjunto $\{0, S0, SS0, \ldots\}$ y números no estándar todos los de $\mathbf{B} - \mathbb{N}$.

En primera aproximación, el orden de un sistema no estándar es así:



De hecho, los números no estándar aparecen formando $\mathfrak{Z}$-cadenas (llamadas así por su semejanza con los enteros) y el número de ellas determina la cardinalidad del modelo. Hay siempre una clase infinita de $\mathfrak{Z}$-cadenas y entre dos cualesquiera de ellas siempre hay otra $\mathfrak{Z}$-cadena.

(Ejercicios 4 y 5 de VI.3.1.6.) ■

¿Por qué hay $\mathfrak{Z}$-cadenas?

Puesto que β, la cardinalidad de $\mathcal{B}$ es tal que $\beta > \omega$, habrá números no estándar; por ejemplo, **a**. Los números estándar preceden a los no estándar y el siguiente de un número estándar es también estándar. Además, $\mathcal{N}$ es modelo de

$$\forall x(x \neq c \rightarrow \exists y\, fy = x)$$

que dice que si un número no es cero, es el siguiente de algún otro.

Por consiguiente, $\mathcal{B}$ será también modelo de esta sentencia. Siempre que tengamos un número no estándar, será distinto del cero y por lo tanto el siguiente de otro que tampoco es estándar. Esto nos lleva a la siguiente conclusión:

3.1.4.4. *Proposición:* El orden $<^{\mathcal{B}}$ no es un buen orden.

En efecto, por lo que acabamos de decir, a partir de un **b** no estándar se monta una cadena descendiente: $\mathbf{b} >^{\mathcal{B}} \mathbf{b}_1 >^{\mathcal{B}} \ldots \mathbf{b}_n >^{\mathcal{B}} \ldots$ Es decir, sin primer elemento. ■

3.1.4.5. *Proposición:* Hay subconjuntos de **B** que por el contrario sí que poseen elemento mínimo en $<^{\mathcal{B}}$.

En efecto, los subconjuntos definibles de **B** que no son vacíos poseen elementos mínimo. Sea $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{B}$ tal que

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{B} \,/\, \mathcal{B}[\mathbf{x}] \text{ sat } \varphi\langle x\rangle\}$$

Puesto que el orden de los naturales es un buen orden,

$$\mathcal{N} \text{ sat } \exists\, x\, \varphi\langle x\rangle \rightarrow \exists x(\varphi\langle x\rangle \wedge \forall y\, (\varphi\, \langle y\rangle \rightarrow x \leqslant y)),$$

siendo $x \leqslant y$ abreviatura de $x = y \vee x < y$.

Y dado que $\mathcal{N} < \mathcal{B}$, también $\mathcal{B}$ será modelo suyo. De aquí se sigue que **D** tenga primer elemento. ■

La construcción que hemos investigado era la de un modelo no estándar de TEO($\mathcal{N}$), tal que $\mathbb{N} < \mathcal{B}$. Se trataba, obviamente, de un modelo de AP. Como he dicho anteriormente, los modelos de AP tales que $\mathcal{N}$ está contenido en ellos como

subsistema elemental son los más manejables, pues todas las propiedades del modelo estándar expresables mediante fórmulas se transfieren al no estándar.

Hay, no obstante, otras propiedades que se presentan en modelos cualesquiera de AP siempre que sean no estándar. Por ejemplo, la siguiente.

3.1.5. *Teorema: indefinibilidad de los números estándar*

En un modelo no estándar de AP el conjunto formado por los números estándar no es definible.

Demostración

Sea $\mathscr{A}$ un modelo no estándar de AP. En él llamamos números estándar a los que integran el conjunto $\mathbb{N}(\mathscr{A})$; es decir, los siguientes del cero de $\mathscr{A}$.

Supongamos que $\mathbb{N}(\mathscr{A})$ fuera definible; es decir, que hubiera una fórmula con una variable libre tal que

$$\mathbb{N}(\mathscr{A}) = \{\mathbf{x} \,/\, \mathscr{A}[\mathbf{x}] \text{ sat } \varphi\ (x)\}$$

Clarísimamente, los números no estándar serían los definidos mediante la negación; o sea, que

$$\mathbf{A} - \mathbb{N}(\mathscr{A}) = \{\mathbf{x}/\mathscr{A}[\mathbf{x}] \text{ sat } \neg\varphi\ (x)\}$$

Se puede demostrar que

$$\text{AP} \vdash \forall x(\neg\ \alpha(x) \rightarrow (\neg\alpha(c) \vee \exists y(\neg\alpha(fy) \wedge \alpha(y))))$$

(Problema 7), ya que se trata de una fórmula que equivale a P3.

Por consiguiente, $\mathscr{A}$ es modelo de esta sentencia. Referida a $\mathscr{A}$ la sentencia dice: Si $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ no es estándar —$\mathbf{x} \notin \mathbb{N}(\mathscr{A})$— entonces o bien $\mathscr{A}(c) \notin \mathbb{N}(\mathscr{A})$ o bien hay un cierto $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathbf{y} \in \mathbb{N}(\mathscr{A})$ pero su siguiente no.

Por consiguiente, si $\mathbf{x}$ es un número no estándar se llega a una contradicción: al conjunto de los números estándar le falta un elemento. ■

Ahora se entenderá mejor la diferencia entre el axioma de inducción de Segundo orden y el esquema de inducción de primer orden. Con el segundo nos falta el poder aplicar inducción sobre los números estándar en un modelo que contenga números no estándar. De ahí que dicho esquema no vete el paso de los no estándar.

3.1.6. *Ejercicios*

1) ¿Cuál es la relación existente entre TEO($\mathscr{N}$) y TEO(MOD(Σ))?

2) ¿Por qué son infinitos los modelos de TEO($\mathcal{N}$)?

3) ¿Por qué digo que la extensión de $\mathcal{N}$ a $\langle \mathcal{N}, \leq \rangle$ es inesencial? (véase la nota después de 3.1.3).

4) Sea $\mathfrak{B}$ el sistema que construimos en 3.1.4 y definamos la siguiente relación en **B**,

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \text{ syss } \mathbf{S}^n\mathbf{a} = \mathbf{S}^m\mathbf{b}, \text{ para cada } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{B} \text{ (siendo } n, m < \omega)$$

i) Demostrad que $\sim$ es una relación de equivalencia.

ii) Demostrad que si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$[n]^{\sim} = \{\mathbf{x}/\mathbf{x} \sim n\} = \mathbb{N}.$$

Es decir, la clase de equivalencia de un número estándar es el conjunto de todos los números estándar.

iii) Demostrad que si $\mathbf{x} \in \mathbf{B} - \mathbb{N}$, entonces

$$[\mathbf{x}]^{\sim} = \{\mathbf{y} / \mathbf{y} \sim \mathbf{x}\} = \{\mathbf{y} / \exists n \in \mathbb{N}: \mathbf{y} = \mathbf{x} \pm n\}$$

5) Entre $\mathfrak{T}$-cadenas se puede definir la siguiente relación de orden

$$[\mathbf{a}]^{\sim} <^{\sim} [\mathbf{b}]^{\sim} \text{ syss para todo } \mathbf{x} \in [\mathbf{a}]^{\sim} \text{ y } \mathbf{z} \in [\mathbf{b}]^{\sim}: \mathbf{x} <^{\mathfrak{B}} \mathbf{z}$$

i) Demostrad que $<^{\sim}$ es un orden lineal estricto en la clase

$$\mathfrak{F} = \{[\mathbf{a}]^{\sim} / \mathbf{a} \in \mathbf{B} - \mathbb{N}\}.$$

ii) Demostrad también que $<^{\sim}$ es un orden denso y carece de extremos.

6) Demostrad que si $\mathcal{N} < \mathfrak{B}$ y **b** no es estándar, su predecesor no es estándar. Y en general los números estándar preceden a los no estándar.

7) Demostrad que hay modelos de AP que no son elementalmente equivalentes (pensad en la sentencia α de Gödel).

8) Demostrad que las sentencias α_3 y las α_{4n} de II.3.4 son deducibles de Σ.

9) Sea **a** un natural no estándar del sistema $\mathfrak{B}$ de 3.1.4. Demostrad que **a** + **a** está en distinta $\mathfrak{T}$-cadena que **a**.

Problema 3

Demuestra el teorema 3.1.3.

Problema 4

¿Cuál es la relación existente entre AP, TEO($\mathcal{N}$) y TEO($\langle \mathcal{N}, < \rangle$) $\cap$ FOR(L)?

Problema 5

Demostrad que $\{\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, \theta_4^*\} \subseteq$ AP. Es decir, tomad < como signo definido.

$$\forall xy\ (x < y \leftrightarrow \exists z\ x + fz = y)$$

e ir demostrando:

i) AP $\vdash \forall xyz\ (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$.

ii) AP $\vdash \forall x\ c \leqslant x$.
(Hacedlo utilizando el axioma de inducción en la siguiente ocurrencia

$$c \leqslant c \wedge \forall x\ (c \leqslant x \rightarrow c \leqslant fx) \rightarrow \forall x\ c \leqslant x$$

es decir, $\varphi(x) \equiv c \leqslant x$.)

iii) AP $\vdash \forall x(x = c \vee \exists y\ x = fy)$. (Por inducción sobre x.)

iv) AP $\vdash \forall xy\ (x + y = y + x)$.

v) AP $\vdash \forall y\ (x < y \rightarrow fx \leqslant y)$. (Por inducción sobre y.)

vi) AP $\vdash \forall xy\ (x < y \vee x = y \vee y < x)$. (Por inducción sobre x. El caso $x = c$ es sencillo. Para el paso de x a fx, utilizad v.)

vii) AP $\vdash \forall y \neg \exists x\ (y < x \wedge x < fy)$.
(Comparad con iv.)

Problema 6

Sea $\mathcal{B}$ el modelo estudiado en 3.1.4. Pensad en el sistema $\langle \mathbf{B}, <^{\mathcal{B}} \rangle$. Aclarad la proposición 3.1.4.4 que dice que el sistema $\langle \mathbf{B}, <^{\mathcal{B}} \rangle$ no es un buen orden.

Problema 7

Demostrad que

$$\text{AP} \vdash \forall x\ (\neg\alpha(x) \rightarrow (\neg\alpha(c) \vee \exists y\ (\neg\alpha\ (fy) \wedge \alpha\ (y))))$$

del teorema 3.1.5.

3.2. Modelos no estándar de los reales

Los modelos no estándar de los reales se construyen de manera similar a los de los naturales. Concretamente, partiendo del sistema $\mathfrak{R}$ del cuerpo ordenado de los reales, al que por comodidad podemos añadirle la función valor absoluto, se llega a un sistema $\mathfrak{R}^*$ tal que $\mathfrak{R} < \mathfrak{R}^*$ —utilizando el teorema de Löwenheim-Skolem (VI.2.7)— y $\mathfrak{R}^*$ tiene una cardinalidad superior a la de $\mathfrak{R}$. Puesto que $\mathfrak{R} < \mathfrak{R}^*$, el nuevo sistema contendrá a los números reales estándar y será un cuerpo ordenado. En verdad tendrá todas las propiedades expresables mediante fórmulas de primer orden que tuviera $\mathfrak{R}$.

Veamos con detenimiento cómo es el nuevo sistema.

3.2.1. *Construcción de $\mathfrak{R}^*$*

Sea $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, ^-, |\,|, < \rangle$ el sistema de los reales en donde destacamos el 0, 1, suma, producto, la función que a cada elemento lo manda a su simétrico en la suma, la función valor absoluto y el orden estricto.

Sea $\langle \mathfrak{R}, \bar{\mathbf{r}} \rangle$ la extensión en dónde se destacan todos los elementos de $\mathbb{R}$. En el lenguaje apropiado, $L(\langle \mathfrak{R}, \bar{\mathbf{r}} \rangle)$, tendremos nombres para cada uno de los números reales; $c_\mathbf{r}$ va a ser el nombre del número real $\mathbf{r}$.

Consideremos el conjunto de sentencias $\mathrm{TEO}(\langle \mathfrak{R}, \bar{\mathbf{r}} \rangle)$; es decir, su diagrama completo y la colección de fórmulas

$$\{c_\mathbf{r} < x \,/\, \mathbf{r} \in \mathbb{R}\}$$

Llamemos Γ al conjunto integrado por todas ellas; o sea,

$$\Gamma = \mathrm{TEO}(\langle \mathfrak{R}, \bar{\mathbf{r}} \rangle) \cup \{c_\mathbf{r} < x \,/\, \mathbf{r} \in \mathbb{R}\}$$

Evidentemente cada subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tiene un modelo, pues tomando como asignación $\mathcal{J}$ a una en la que

$$\mathcal{J}(x) = \text{máx}\ \{\mathbf{r}/c_\mathbf{r} < x \in \Delta\} + 1$$

obtenemos: $\langle \mathfrak{R}, \bar{\mathbf{r}} \rangle\ \mathcal{J}$ es modelo de Δ.

Aplicando el teorema de compacidad, que vale para fórmulas, obtenemos que hay un sistema $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ y un $\mathbf{b} \in A$ tal que $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle\ \mathcal{J}^{\mathbf{b}}_x$ es modelo de Γ; siendo $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_\mathbf{r} \rangle_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}}$.

Pero si $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ es modelo de $\mathrm{TEO}(\langle \mathfrak{R}, \bar{\mathbf{r}} \rangle)$, también $\mathfrak{R} \stackrel{\sim}{<} \mathcal{A}$ (por IV.6.7).

Evidentemente, $\mathfrak{R} \equiv \mathcal{A}$ pero no son isomorfos porque en A tienen que aparecer necesariamente nuevos individuos ya que el orden de los reales carece de extremo superior y las fórmulas $c_\mathbf{r} < x$ tomadas en su conjunto exigen que haya reales no estándar.

3.2.1.1. *Proposición*

La función **h**: $\mathbb{R} \to \mathbf{A}$ tal que $\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{a_r}$ es una inmersión de $\mathfrak{R}$ en $\mathcal{A}$.

3.2.1.2. *Proposición*

Hay un sistema $\mathfrak{R}^*$ tal que $\mathfrak{R} < \mathfrak{R}^*$.
La idea es la siguiente:

y construimos
$\mathfrak{R}^* \cong \mathcal{A}$

Puesto que $\mathfrak{R} \stackrel{\sim}{<} \mathcal{A}$, dentro de $\mathcal{A}$ hay una copia de $\mathfrak{R}$. Pero también sabemos (IV.3.5) que hay un sistema $\mathfrak{R}^* \cong \mathcal{A}$ que contiene a $\mathfrak{R}$ como subsistema, $\mathfrak{R} \sqsubseteq \mathfrak{R}^*$: básicamente es $\mathcal{A}$, pero cambiando los individuos $\mathbf{a_r}$ por $\mathbf{r}$.

3.2.2. *Propiedades de $\mathfrak{R}^*$*

Para demostrar que $\mathfrak{R}^*$ tiene una determinada propiedad usaremos habitualmente IV.2.2. Es decir, seguiremos el siguiente procedimiento: 1) Observar el sistema $\mathfrak{R}$ y ver si la tiene, 2) comprobar que puede ser expresada mediante una fórmula de primer orden, de $L(\mathfrak{R})$ en nuestro caso y 3) aplicar sin dilación el hecho de que $\mathfrak{R} < \mathfrak{R}^*$ (el corolario IV.2.2 o alguno equivalente).
En especial, podremos demostrar que $\mathfrak{R}^*$ es un cuerpo ordenado.

3.2.2.1. *Proposición $\mathfrak{R}^*$ es un cuerpo*

En efecto, sabemos que $\mathfrak{R}$ es un cuerpo. O mejor, que $\langle \mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, ^- \rangle$ tiene dos operaciones binarias (suma y producto) que son ambas asociativas y conmutativas, hay elemento neutro y unidad (distintos), todo elemento tiene simétrico y los distintos del neutro también inverso y el producto distribuye la suma.

Además, todas estas propiedades son expresables mediante sentencias de $L(\mathfrak{R})$ (véase el ejemplo 5) de V.1.2).

Puesto que $\mathfrak{R} < \mathfrak{R}^*$, $\langle \mathbb{R}^*, 0^*, 1^*, +^*, \cdot^*, {}^{-*} \rangle$ es también un cuerpo. ■

3.2.2.2. *Proposición:* $\mathfrak{R}^*$ contiene un orden lineal estricto, denso y sin extremos.

En efecto, sabemos que $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ es un orden lineal estricto, denso y sin extremos. Todas estas propiedades son expresables en $L(\mathfrak{R})$ (véase ejercicios de V.1.4). Por consiguiente, $\langle \mathbb{R}^*, <^* \rangle$ es un orden lineal estricto, es denso y carece de extremos. ■

3.2.3. *¿Cómo son los nuevos elementos de* $\mathbb{R}^*$*?*

Sabemos que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^*$ pero que $\mathbb{R} \neq \mathbb{R}^*$. Al construir el modelo no estándar vimos que había un $\mathbf{b} \in \mathbf{A}$ que hacía verdaderas las fórmulas $c_r < x$, para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$. Dicho $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^*$ pues sólo reemplazamos los correspondientes a los reales al pasar de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{R}^*$ —es decir, los $\mathbf{a}_r$— y es evidente que éste no lo es.

Así que en $\mathbb{R}^*$ hay un $\mathbf{b}$ tal que $\mathbf{r} <^* \mathbf{b}$, para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$. Puesto que no es cero, tendrá su inverso, $\mathbf{b}^{-1^*}$. Llamaremos infinitos a los elementos del estilo $\mathbf{b}$ e infinitesimales a los semejantes a $\mathbf{b}^{-1^*}$ (que sería $1/^*\mathbf{b}$, operación siempre definible en un cuerpo).

Definamos ahora

$$\mathrm{INF}(\mathbb{R}^*) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^* \,/\, \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}: |\mathbf{x}|^* >^* |\mathbf{r}|^*\},$$

conjunto de los elementos infinitos de $\mathbb{R}^*$

$$\mathrm{FIN}(\mathbb{R}^*) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^* \,/\, \exists \mathbf{r} \in \mathbb{R}: |\mathbf{x}|^* <^* \mathbf{r}\},$$

conjunto de los elementos finitos de $\mathbb{R}^*$

$$\mathrm{INFMAL}(\mathbb{R}^*) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^* \,/\, \forall \mathbf{r} \in \mathbb{R}^+: |\mathbf{x}|^* <^* \mathbf{r}\},$$

infinitesimales de $\mathbb{R}^*$.

Se puede demostrar lo siguiente:

3.2.3.1. *Proposición*

En $\mathbb{R}^*$ hay infinitesimales, distintos de 0.

3.2.3.2. *Proposición*

Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^*$ se cumple, $\mathbf{x} \in \mathrm{INFMAL}(\mathbb{R}^*)$ syss $\mathbf{x}^{-1^*} \in \mathrm{INF}(\mathbb{R}^*)$.

3.2.3.3. *Proposición*

$\mathbb{R} \subseteq \mathrm{FIN}(\mathbb{R}^*)$ pero $\mathbb{R} \neq \mathrm{FIN}(\mathbb{R}^*)$. ■

3.2.4. *Propiedades de $\mathfrak{R}$ no expresables en $L(\mathfrak{R})$*

Hemos visto que las propiedades de $\mathfrak{R}$ expresables en primer orden son también atribuibles a $\mathfrak{R}^*$. ¿Qué sucede con las propiedades de $\mathfrak{R}$ que no pueden formularse en $L(\mathfrak{R})$, las inefables?

En $\mathfrak{R}$ todo conjunto acotado superiormente posee un supremo. Es decir, si tenemos un subconjunto $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}$ tal que en el orden $<$ de $\mathfrak{R}$ hay un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ que es mayor que todos los de $\mathbf{S}$, entonces hay también un elemento de $\mathbb{R}$ que es la menor de las cotas superiores de $\mathbf{S}$. Evidentemente esta propiedad no puede expresarse en primer orden, pues no podemos cuantificar sobre conjuntos.

Esta propiedad no la tiene $\mathfrak{R}^*$ pues $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^*$, posee cota superior (piénsese en el $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^*$ mencionado en VI.3.2.1) pero demostrareis, en el Problema 8, que $\mathbb{R}$ no posee supremo, con el orden $<^*$ de $\mathfrak{R}^*$.

3.2.5. *Otras peculiaridades de $\mathfrak{R}^*$*

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y cuando construyamos el sistema $\mathfrak{R}^*$ habrá un conjunto $\mathbb{N}^*$ que represente a los números naturales en $\mathfrak{R}^*$ (¿qué propiedades tiene dicho conjunto $\mathbb{N}^*$?

Para poder formular con precisión ésta y otras cuestiones similares, vamos a considerar que nuestro modelo inicial $\mathfrak{R}$ tenía destacada, como relación monaria, al conjunto de los naturales. O mejor, haremos un terrible exceso y consideraremos que en nuestro modelo estándar inicial están destacadas todas las funciones y relaciones posibles sobre $\mathbb{R}$.

Es decir,

$$\uparrow \mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, \langle \mathbf{f} \rangle_{(\mathbf{f}:\, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}}, \langle \mathbf{P} \rangle_{(\mathbf{P} \subseteq \mathbb{R}^n)_{n \in \mathbb{N}-\{0\}}} \rangle$$

Exactamente igual que en 3.2.1 construimos ahora un sistema no estándar, $(\uparrow \mathfrak{R})^*$

$$(\uparrow \mathfrak{R})^* = \langle \mathbb{R}^*, \langle \mathbf{f}^* \rangle_{(\mathbf{f}^*:\, \mathbb{R}^{*n} \to \mathbb{R}^*)_{n \in \mathbb{N}}}, \langle \mathbf{P}^* \rangle_{(\mathbf{P}^* \subseteq \mathbb{R}^{*n})_{n \in \mathbb{N}-\{0\}}} \rangle$$

Es en el marco de este sistema en dónde nos preguntamos qué elementos integran $\mathbb{N}^*$.

3.2.5.1. *Proposición:* En $\mathbb{N}^*$ hay elementos infinitos.

En efecto, lo que queremos ver es que $\mathbb{N}^* \cap \mathrm{INF}(\mathbb{R}^*) \neq \varnothing$.

Sabemos que $\mathbb{N}$ carece de cota superior en $\mathbb{R}$. Es decir, la sentencia

$$\forall x \exists y\ (Ny \wedge y > x)$$

es verdadera en $(\uparrow \mathfrak{R})$.

En el sistema $(\uparrow \mathfrak{R})$ esta sentencia dice que

«para cada $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$ hay un $\mathbf{y} \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{y} > \mathbf{r}$».

En el sistema $(\uparrow \mathfrak{R})^*$ también será verdad esta sentencia (pues $(\uparrow \mathfrak{R}) \equiv (\uparrow \mathfrak{R})^*$) y dice que «para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^*$ hay un $\mathbf{y} \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathbf{y} >^* \mathbf{x}$».

Tomemos un elemento infinito y positivo de $\mathbb{R}^*$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^*$. Habrá un $\mathbf{y} \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mathbf{y} >^* \mathbf{b}$. Puesto que $\mathbf{b} >^* \mathbf{r}$, para todo $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$, tendremos que $\mathbf{y}$ es también infinito. ■

3.2.5.2. *Proposición:* $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle < \langle \mathbb{N}^*, 0^*, 1^*, +^*, \cdot^*, <^* \rangle$

Para hacerlo en vez de utilizar las fórmulas del lenguaje de los naturales tendremos que utilizar fórmulas de $L(\uparrow \mathfrak{R})$ que digan lo mismo.

En especial, cuando decimos $\forall x \varphi$ en el lenguaje de los naturales, diremos $\forall x\ (Nx \rightarrow \varphi')$ en el de los reales y en vez de $\exists x \varphi$ en el de los naturales, diremos $\exists x\ (Nx \wedge \varphi')$ en el de los reales.

La demostración os la dejo como ejercicio (3 de 3.2.7). ■

3.2.6. *Números finitos*

El conjunto $\mathrm{FIN}(\mathbb{R}^*)$ está formado por los números finitos de $\mathbb{R}^*$ en donde se incluyen todos los estándar pero también otros peculiares de $\mathbb{R}^*$. ¿Cómo son estos elementos finitos no estándar?

Para verlo introduzcamos en $\mathbb{R}^*$ la siguiente relación, que será de equivalencia.

3.2.6.1. *Definición*

$\mathbf{x}$ está infinitamente próximo a $\mathbf{y}$ y escribiremos $(\mathbf{x} \simeq \mathbf{y})$ syss $\mathbf{x} -^* \mathbf{y}$ es infinitesimal. □

3.2.6.2. *Teorema*

Se verifican las condiciones siguientes:

1) $\simeq$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^*$.

2) Para cada $x, y, u, v \in \mathbb{R}^*$ se cumple:

i) Si $u \simeq v$ y $x \simeq y$ entonces $u +^* x \simeq v +^* y$ y $-^* u \simeq -^* v$

ii) Si $u \simeq v$ y $x \simeq y$ y $x, y, u, v \in FIN(\mathbb{R}^*)$ entonces $u \cdot^* x \simeq v \cdot^* y$.

Demostración

1) $\simeq$ es de equivalencia.

En efecto, $\simeq$ es reflexiva puesto que $x -^* x = 0$ que es infinitesimal.
Por otra parte, $\simeq$ es simétrica ya que si $x -^* y$ es infinitesimal, $y -^* x = -^* (x -^* y)$ es también infinitesimal.
Y por último, $\simeq$ es también transitiva pues si $x \simeq y$ y $y \simeq z$ entonces

$$x -^* z = (x -^* y) +^* (y -^* z) \in INFMAL(\mathbb{R}^*).$$

(Esto se sigue del hecho de que $INFMAL(\mathbb{R}^*)$, está cerrado bajo $+^*$, cosa que demostrareis vosotros. Problema 9.)

2) Sean $x, y, u, v \in \mathbb{R}^*$ y supongamos que $u \simeq v$ y $x \simeq y$.

i) $(u +^* x) -^* (v +^* y) = (u -^* v) +^* (x -^* y)$ es elemento de $INFMAL(\mathbb{R}^*)$.
(Como antes, Problema 9.)
Y también $-^* u \simeq -^* v$ pues $INMAL(\mathbb{R}^*)$ esta cerrado bajo simétricos. (Problema 9).

ii) $(u \cdot^* x) -^* (v \cdot^* y) = (u \cdot^* x) -^* (u \cdot^* y) +^* (u \cdot^* y) -^* (v \cdot^* y) = u \cdot^* (x -^* y) +^* (u -^* v) \cdot^* y$ es elemento de $INFMAL(\mathbb{R}^*)$.
(Pues se puede demostrar que $INFMAL(\mathbb{R}^*)$ está cerrado bajo multiplicación por elementos de $FIN(\mathbb{R}^*)$. Es decir, y lo demostrareis en el Problema 9.

Si $x \in INFMAL(\mathbb{R}^*)$ y $z \in FIN(\mathbb{R}^*)$, entonces $x \cdot^* y \in INFMAL(\mathbb{R}^*)$. ■

3.2.6.3. *Lema*

Si $x \not\simeq y$ y al menos uno es finito, entonces hay un $g \in \mathbb{R}$ tal que g esta entre x e y.

Demostración

Supongamos que $0 \leq^* x <^* y$ (pues si, $x \leq^* y <^* 0$ sería similar y si $x <^* 0 <^* y$ sería trivial).
Pues que $x \not\simeq y$, entonces $y -^* x$ no es infinitesimal y por lo tanto hay un $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $r <^* y -^* x$. Pero el orden de los reales es arquimediano y por consiguiente, al ser

$\mathbf{x}$ finito, $\mathbf{x} <^* m \cdot \mathbf{r}$, m es un número natural. Tomando, el menor de los m que verifican esta condición obtenemos

$$\mathbf{x} <^* m \cdot \mathbf{r} <^* \mathbf{y}$$

(Pues al ser m el menor, $(m - 1)\ \mathbf{r} \leq^* \mathbf{x}$.
De donde sale que $\mathbf{x} <^* m \cdot \mathbf{r} \leq^* \mathbf{x} +^* \mathbf{r} <^* \mathbf{y}$). ■

3.2.6.4. *Teorema*

Cada $\mathbf{x} \in \mathrm{FIN}(\mathbb{R}^*)$ está infinitamente próximo a un único $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$.

Demostración

Para cada $\mathbf{x} \in \mathrm{FIN}(\mathbb{R}^*)$, el conjunto $T = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R} \,/\, \mathbf{y} \leq^* \mathbf{x}\}$ de números estándar posee una cota superior en $\mathbb{R}$. Sea $\mathbf{r}$ el supremo.

3.2.6.4.1. *Proposición:* $\mathbf{x} \simeq \mathbf{r}$

Supongamos que $\mathbf{x} \not\simeq \mathbf{r}$. Por consiguiente hay un número estándar $\mathbf{q} \in \mathbb{R}$ entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{r}$.

Si $\mathbf{r} < \mathbf{q} <^* \mathbf{x}$ entonces $\mathbf{r}$ no podría ser cota superior de T. Si $\mathbf{x} <^* \mathbf{q} < \mathbf{r}$, entonces $\mathbf{q}$ sería también una cota superior de T y $\mathbf{r}$ no sería el supremo. Por lo tanto, $\mathbf{x} \simeq \mathbf{r}$.

Con esto hemos demostrado que hay un número real infinitamente próximo a $\mathbf{x}$. Para ver que es único, suponed que hubiera otro, $\mathbf{s}$, tal que $\mathbf{x} \simeq \mathbf{s}$. Al ser de equivalencia la relación $\simeq$, de $\mathbf{x} \simeq \mathbf{r}$ y $\mathbf{x} \simeq \mathbf{s}$ se sigue que $\mathbf{r} \simeq \mathbf{s}$. Pero siendo $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ números estándar, $\mathbf{r} = \mathbf{s}$. ■

3.2.6.5. *Corolario*

Cada $\mathbf{x} \in \mathrm{FIN}(\mathbb{R}^*)$ tiene una descomposición en parte estándar e infinitesimal: $\mathbf{x} = \mathbf{e} +^* \mathbf{i}$. ■

3.2.7. *Ejercicios*

1) Demostrad la proposición 3.1.1.

2) Demostrad la proposición 3.2.1.2.

3) Demostrad la proposición 3.2.4.2.

Problema 8

Sea $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto que carece de elemento máximo. Como subconjunto de $\mathbb{R}^*$, en el orden $<^*$ posee en $\mathbb{R}^*$ cotas superiores. Demostrad, no obstante, que $\mathbf{B}$ no tiene supremo.

Problema 9

Demostrad que FIN($\mathbb{R}^*$) es un subanillo del cuerpo de los reales no estándar y que INFMAL($\mathbb{R}^*$) es un ideal de este anillo.

Es decir, demostrad:

1) FIN($\mathbb{R}^*$) está cerrado bajo $+^*$, $-^*$ y $\cdot^*$.

2) INFMAL($\mathbb{R}^*$) está cerrado bajo $+^*$, $-^*$ y $\cdot^*$ para elementos de FIN($\mathbb{R}^*$):

Si $\mathbf{x} \in$ INFMAL($\mathbb{R}^*$) y $\mathbf{y} \in$ FIN($\mathbb{R}^*$) entonces $\mathbf{x} \cdot^* \mathbf{y} \in$ INFMAL($\mathbb{R}^*$).

4. LA PARADOJA DE SKOLEM

Una de las consecuencias inmediatas de los teoremas Löwenheim-Skolem es que dado un sistema infinito es siempre posible encontrar otro que, sin ser isomorfo al primero, es indistinguible de él mediante fórmulas de primer orden. Observado atentamente, él fenómeno de la existencia de modelos de cardinalidades tan dispares resulta paradójico. Piénsese en una teoría en la que se pueda formalizar, y tenga algun modelo, la sentencia que expresa: «existe un conjunto supernumerable». Segun el teorema de Löwenheim-Skolem, la teoría tiene también un modelo numerable y en él la problemática sentencia tiene que ser verdadera. ¿Significa que existe un subconjunto supernumerable «de veras» de nuestro universo numerable? Si esto fuera así, la contradicción sería flagrante pues sabemos que la cardinalidad de un subconjunto no puede sobrepasar la del conjunto.

La paradoja no llega a ser contradicción, según veremos con mayor detalle en los apartados siguientes. El motivo es que en el modelo numerable puede haber un subconjunto del universo para el que no haya ninguna función biyectiva en ninguno de los subconjuntos de los naturales. Siendo así, en ese modelo, ese subconjunto es supernumerable. Eso no quiere decir que sea supernumerable «de verdad»: en el universo matemático, fuera del modelo, habrá una función biyectiva.

4.1. El universo matemático

Llamaremos universo matemático al par $\langle \mathcal{V}, \in \rangle$ formado por un universo, $\mathcal{V}$, en el que están todos los conjuntos y que posee la relación binaria de pertenencia. (Os aconsejo repasar II.3.5). $\mathcal{U} = \langle \mathcal{V}, \in \rangle$ no es un sistema porque $\mathcal{V}$, la jerarquía estándar de conjuntos, no es ella misma un conjunto.

En $\mathcal{V}$ están todos los objetos que necesitamos para hacer matemáticas pues es bien sabido que tanto las nociones aparentemente más simples que la de conjunto como las más complicadas, son todas reducibles a la de conjunto. Piénsese en los conceptos de número natural, función, sistema e incluso homomorfismo: todos ellos se reducen al concepto de conjunto. Es éste el motivo por el que la jerarquía de conjuntos puede pensarse como una jerarquía en vértice, cuyo primer elemento, en el vértice, es el conjunto $\varnothing$. Es un hecho aceptado el que dados dos conjuntos cualesquiera, su unión, intersección y diferencia son conjuntos que también están en la jerarquía. O que dada una función, en la jerarquía, también está su recíproca, su dominio y su recorrido.

Aunque $\mathcal{U}$ no sea un sistema, podemos hablar de él en el lenguaje de la teoría de conjuntos, L, cuyo único signo peculiar es el relator binario de pertenencia, $\in$. En este lenguaje podemos expresar las propiedades fundamentales de los conjuntos y una versión aceptada de ellas es la ofrecida por los axiomas de Zermelo-Fraenkel (II.3.5.2).

4.2. La teoría axiomática de conjuntos

En II.3.5.2 extendimos el lenguaje L, añadiéndole nuevos functores y relatores, para así poder expresar mejor los axiomas de Zermelo-Fraenkel. En ese mismo marco, y utilizando el mismo lenguaje de primer orden, se puede introducir la noción de número natural y formular con precisión la sentencia que dice que hay un conjunto supernumerable; es decir, un conjunto que no es biyectable con ninguno de los subconjuntos de los naturales. Dicha sentencia es derivable de los axiomas de Zermelo-Fraenkel y ha de ser verdadera en todo modelo de la teoría, sea cual sea su cardinalidad.

Por consiguiente, si la teoría de conjuntos tuviera algún modelo, tendría también un modelo numerable y el mentado modelo lo sería de la sentencia que dice que hay conjuntos supernumerables. ¿Cómo puede ser esto verdad en un modelo cuyo universo es numerable?

4.2.1. *Los números naturales en Zermelo-Fraenkel*

Cuando de fundamentar se trata una parcela determinada de la matemática se pueden seguir dos caminos muy distintos:

1) Se pueden considerar los conceptos básicos del campo como conceptos primitivos y considerar que el núcleo fundamental de la investigación está en determinar cómo interrelacionan dichos conceptos, qué propiedades tienen las funciones y relaciones a destacar en ese ámbito. En ese caso se cuenta con una cierta realidad matemática que se conoce intuitivamente, concebible como un sistema —o una clase de sistemas—, se determina un lenguaje que le cuadre y se formulan unos axiomas de los que se puedan derivar como teoremas los hechos matemáticos que ya se conocían.

Esto es lo que hicimos con la aritmética de los naturales cuando introdujimos los axiomas de Peano. Es decir, AP es una teoría de la que se derivan como teoremas, en

el lenguaje formal de primer orden, los hechos de la aritmética de los naturales. Como recordaréis, nosotros no definimos ni el concepto de número natural, ni el de cero, ni el del siguiente de un numero natural; eran primitivos. Y por supuesto, en el momento en que una teoría formal toma cuerpo, si tiene algún modelo infinito, no tiene uno, ni dos, ni seis millones, tiene infinitos modelos y algunos pudieran no parecerse demasiado al sistema intuitivo original. En los apartados precedentes lo hemos estado constatando.

Seguimos también este camino en Teoría de conjuntos. Sabemos que la jerarquía de conjuntos está integrada por todo lo que nos interesa considerar como conjunto, determinamos un lenguaje adecuado y formulamos unos axiomas, los de Zermelo-Fraenkel en nuestro caso, de los que se derivan los hechos fundamentales. Son primitivos en este caso el concepto de conjunto y el de pertenencia. También aquí si la teoría tiene algún modelo, tiene infinitos y muy distintos entre sí. Y en particular, el universo matemático $\langle \mathcal{V}, \in \rangle = \mathfrak{U}$ no es uno de ellos.

Sucede además que nuestro concepto de conjunto es tan vago que los axiomas de Zermelo-Fraenkel, incluyendo el axioma de elección, aunque están universalmente considerados como una buena formalización de la Teoría de conjuntos intuitiva, no nos permiten decidir acerca de cuestiones tales como si vale o no la hipótesis del continuo. (Pero esto es otra historia...)

2) Volviendo a los caminos que se pueden seguir para fundamentar una parcela matemática, el segundo es tomar alguna otra parcela ya fundamentada y definir en ella los conceptos clave. En el caso de la aritmética de los naturales se puede tomar como parcela ya fundamentada la de la Teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y definir en ella el concepto de número natural.

Este camino, el de la definición del cero, siguiente y número natural, es el que abrieron Frege y Russell. Sin embargo, ellos no tomaron como teoría-marco la de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, sino que intentaron basarse en la Lógica pura.

Tened en cuenta que cuando tomamos como marco una teoría axiomática, tendremos los modelos que tenga la teoría axiomática y en especial no tendremos al Universo matemático como modelo. Por consiguiente, las propiedades de los naturales definidos en Zermelo-Fraenkel no son las «de verdad», las del Universo matemático. Por ejemplo, hemos visto que en primer orden hay modelos no estándar de los naturales. Esto quiere decir que dos modelos cualesquiera de AP, o incluso de TEO($\mathcal{N}$), no son isomorfos necesariamente. Sin embargo, cuando construimos a los naturales en el marco de la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel podemos demostrar el teorema de Dekekind, todo sistema de Peano es isomorfo al que hemos construido en Zermelo-Fraenkel. En este caso hemos tenido que introducir un relator monario para indicar que un cierto conjunto es un sistema de Peano y el teorema de Dedekind lo que expresa es que en cualquier modelo de Zermelo-Fraenkel dos conjuntos que cumplan la propiedad que en ese modelo se interpreta como «ser un sistema de Peano» son lo que en ese modelo significa ser isomorfos entre sí, nada demasiado atrayente, ni fiable.

Para llevar a cabo la construcción de los naturales de Zermelo-Fraenkel vamos a introducir en el lenguaje L, de teoría de conjuntos ampliado, el relator Induct, para indicar que es inductivo.

4.2.1.1. *Definición*

$\forall x$ (Induct $x \leftrightarrow \emptyset \in x \wedge \forall z\, (z \in x \rightarrow z \cup \{z\} \in x)$). □

O sea, estamos definiendo un conjunto inductivo como un poseedor del $\emptyset$ y del siguiente de todos los que estén en él. Aquí $z \cup \{z\}$ es el siguiente de z.

Por el axioma de infinitud sabemos que hay conjuntos inductivos (véase INF en II.3.5.2).

El axioma de separación, SEP, nos permite, por consiguiente, definir a los naturales mediante la propiedad de pertenecer a todo conjunto inductivo. Así definidos, los naturales son un conjunto.

4.2.1.2. *Definición*

$\omega = \{z/z \in x \wedge \forall y$ (Induct $y \rightarrow z \in y)\}$. □

¿Porqué estamos dispuestos a llamar a ω, así definido, el conjunto de los naturales?

En primer lugar, expresando en Zermelo-Fraenkel los axiomas de Peano, ω los cumple. Además, reescritos en L, los teoremas aritméticos usuales se deducen en Zermelo-Fraenkel. Esta es la construcción que normalmente se sigue en un curso de Teoría de conjuntos.

Para explicitar la paradoja de Skolem vamos a expresar en L lo siguiente.

4.2.2. *Proposición:* Hay un conjunto supernumerable.

En efecto, en L podemos expresar la proposición y demostrar que es un teorema de Zermelo-Fraenkel.

Las definiciones de par ordenado, función, dominio, recorrido, función inyectiva y biyectiva son las corrientes y no creo que sea necesario reproducirlas aquí. O mejor, lo hacéis vosotros como ejercicio (VI. 4.4 de 1) a 3). Contando con esos relatores, expresamos la proposición así:

$$\gamma \equiv \exists x\, \neg\exists y\, (\text{Func } y \wedge \text{Inyect } y \wedge \text{Dom } y = x \wedge \text{Rec } y \subseteq \omega)$$

Para ver que γ es derivable en Zermelo-Fraenkel habría que utilizar el teorema de Cantor del que se sigue que ω no es biyectable con Pω, habiendo no obstante una función inyectiva de ω en Pω. Utilizaríamos también el axioma POT del que se sigue que Pω es un conjunto. (La demostración del teorema de Cantor la encontrareis en cualquier libro de Teoría axiomática de conjuntos. Consultad, por ejemplo, el de Suppes.) ■

4.3. Paradoja de Skolem

Si Zermelo-Fraenkel fuera consistente, entonces tendría modelos numerables en los que la sentencia que dice que hay un conjunto supernumerable sería verdadera.

Efectivamente, siendo γ derivable en Zermelo-Fraenkel, todo modelo de esta teoría lo será de γ, pero ¿hay alguno?

Nosotros sabemos que en primer orden ser consistente es equivalente a tener algún modelo. Pero también sabemos que la consistencia de Zermelo-Fraenkel no puede demostrarse, es el Segundo teorema de incompletud de Gödel (que no hemos demostrado, ni podemos hacerlo aquí).

Supongamos, por lo tanto, que Zermelo-Fraenkel tuviera algún modelo. En tal caso, por los teoremas de Lowenheim-Skolem deducimos que tiene un modelo numerable, $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \in^{\mathcal{A}} \rangle$. Evidentemente, $\mathcal{A}$ será modelo de γ. En el sistema $\mathcal{A}$ sólo está destacada la relación binaria de pertenencia, $\in^{\mathcal{A}}$, que interpretará al relator de pertenencia, $\in$, del lenguaje formal. (Recordad que poníamos el mismo signo en el lenguaje y para la auténtica relación de pertenencia, la ontológica, la genuina).

¿Qué significa que $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \in^{\mathcal{A}} \rangle$ sea modelo de γ?

En primer lugar, pensad que la relación binaria $\in^{\mathcal{A}}$ que interpreta al relator $\in$ del lenguaje no es necesariamente la relación binaria $\in$ «auténtica», la del universo matemático. Por consiguiente, dado un $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, el conjunto de sus elementos no tiene porqué coincidir con el de los relacionados con $\mathbf{a}$ mediante $\in^{\mathcal{A}}$. Es decir, aunque en el universo matemático $\mathbf{a} = \{\mathbf{x}/\mathbf{x} \in \mathbf{a}\}$, en el modelo $\mathcal{A}$ puede no coincidir con $\{\mathbf{x} \in \mathbf{A}/\mathbf{x} \in^{\mathcal{A}} \mathbf{a}\}$, que es el significado que tiene en $\mathcal{A}$.

De forma similar, el que para un cierto $\mathbf{b} \in \mathbf{A}$ se cumpla que $\mathcal{A}[\mathbf{b}]$ sat Func y, significa que en $\mathcal{A}$ el elemento $\mathbf{b}$ de $\mathbf{A}$ está en el subconjunto de $\mathbf{A}$ que interpreta el relator Func, no necesariamente tiene que ser $\mathbf{b}$ lo que en nuestro universo matemático se considera una función.

Así queda claro que el que $\mathcal{A}$ sea modelo de γ sólo quiere decir que hay un $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{A}[\mathbf{a}]$ sat $\neg\exists\, y\, (\text{Func}\, y \wedge \text{Inyect}\, y \wedge \text{Dom}\, y = x \wedge \text{Rec}\, y \subseteq \omega)$. Y esto, a su vez, quiere decir que en $\mathcal{A}$ no hay ningún $\mathbf{b}$ que cumpla los requisitos que en $\mathcal{A}$ se exigen para ser función inyectiva de $\mathbf{a}$ en $\omega^{\mathcal{A}}$. A esto le llamamos ser supernumerable en $\mathcal{A}$. Pero $\{\mathbf{x} \in \mathbf{A}/\mathbf{x} \in \mathbf{a}\}$ y, por supuesto, $\{\mathbf{x} \in \mathbf{A}/\mathbf{x} \in^{\mathcal{A}} \mathbf{a}\}$ son numerables puesto que $\mathbf{A}$ lo era. Siendo numerable, en nuestro universo matemático, $\exists$ hay una función inyectiva de dicho conjunto en un subconjunto de los naturales, ω. Naturalmente, esta función no está en $\mathbf{A}$, o no cumple los requisitos exigidos para establecer la supernumerabilidad del conjunto en $\mathbf{A}$.

Con esto hemos visto que la paradoja no conduce a contradicción pues el universo matemático y los modelos de Zermelo-Fraenkel no tienen que coincidir y un concepto matemático y su significado en un modelo de Zermelo-Fraenkel no son necesariamente la misma cosa.

4.4. *Ejercicios*

1) Definid un functor binario para los pares ordenados utilizando el de par desordenado.

2) Definid los relatores monarios de: Func, Inyect y Biyect (función, inyectiva y biyectiva).

3) Definid el functor monario de Dom y Rec (dominio y recorrido).

Problema 10

¿Es también paradójico el que la teoría de los reales tenga un modelo numerable?

Capítulo VII
TEORIAS COMPLETAS Y CATEGORICAS

INTRODUCCION

Ete capítulo está dedicado fundamentalmente al estudio de la completud de teorías y a la introducción de diversos métodos de verificación de esta propiedad, que fue definida en el capítulo IV. Como señalamos en el capítulo V, una teoría completa sintácticamente caracterizada es, en sí misma, un procedimiento de decisión; toda sentencia es o deducible o refutable utilizando el marco de la teoría. Esto significa, como veremos, que la clase de los modelos de una teoria completa está fuertemente trabada por lazos de equivalencia elemental.

En general, los distintos modelos de una teoría dada pueden ser muy diferentes. Por ejemplo, la teoría de grupos tiene modelos muy variados: finitos e infinitos, conmutativos y no, etc. Sin embargo, cuando una teoría es completa, cosa que evidentemente no ocurre con la de grupos, sus modelos se parecen mucho más; las teorías completas determinan sus modelos hasta equivalencia elemental, de manera mucho más precisa que la de grupos. Un caso extremo, en el que muy pocas teorías se encuentran, es cuando todos los modelos son isomorfos. En este capítulo a las teorías que caracterizan tan perfectamente sus modelos las llamamos categóricas. En el lenguaje de la identidad es categórica la teoría generada por la fórmula que afirma que hay n elementos en el universo. En el lenguaje de los grupos es categórica la teoría de grupos de orden cuatro en la que cada elemento distinto de la unidad es de orden dos.

En realidad, teorías categóricas no hay casi porque, por Löwenheim-Skolem, en el momento en que una teoría tenga un modelo infinito, los tendrá de distinta cardinalidad y, naturalmente, los de cardinalidades distintas no pueden ser isomorfos.

Sin embargo, si ponemos una condición menos exigente y llamamos k-categórica a una teoría que tiene modelos de cardinalidad k y todos los modelos en dicha cardinalidad son isomorfos, vemos que algunas teorías interesantes son k-categóricas.

Por ejemplo, la teoría de los conjuntos densamente ordenados sin primer ni último elemento, es $\aleph_0$-categórica. (Teorema de Cantor, 1985.)

En ocasiones, la relación que mantienen entre sí todos los modelos de una teoría no es la de isomorfía, sino la de equivalencia elemental. Son estás las teorías de este capítulo, las completas. Aunque no hayamos definido así la completud de una teoría demostraremos que nuestra definición equivale a ésta.

Las teorías completas son interesantes porque podemos extraer conclusiones matemáticas de gran relevancia acerca de un sistema $\mathscr{A}$ que sea modelo de una teoría completa Δ, en el momento en que conozcamos uno sólo de los modelos de Δ. Suponed que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son modelo de una teoría completa, Δ. Si α es una sentencia del lenguaje de la teoría que es verdadera en $\mathscr{A}$, entonces α es también verdadera en $\mathscr{B}$ y viceversa. Como veis, podemos atribuir al sistema $\mathscr{A}$ todas las propiedades del $\mathscr{B}$ sin mediar más explicación que la de que ambos sistemas son modelo de la misma teoría completa y, naturalmente, que la propiedad es expresable mediante una sentencia de primer orden del lenguaje de la teoría.

Otra aplicación matemática de la completud de teorías es todo lo relacionado con la decidibilidad de teorías pues, como señalé en V.1.3; una teoría axiomatizable y completa es decidible.

Como sabeis, hay teorías que se presentan de forma que son trivialmente completas; por ejemplo, TEO($\mathscr{A}$), siendo $\mathscr{A}$ un sistema cualquiera. Sin embargo, es muy corriente el definir a una teoría mediante un conjunto finito o recursivo de axiomas, en cuyo caso sí que tiene sentido preguntarse si la teoría es completa. Por ejemplo, el conjunto Σ de los axiomas de la aritmética de Peano de primer orden (VI.3.1), AP, tiene como modelo al sistema $\mathscr{N}$ de los números naturales estándar. ¿Puede Σ decidir acerca de todas las sentencias del lenguaje de la aritmética? o de forma equivalente, ¿es TEO($\mathscr{N}$) = AP? Sabemos por el teorema de Gödel, y así lo hemos comentado con anterioridad, que la respuesta a esta pregunta es que no.

Por el contrario, la teoría del sistema $\mathscr{N}_S = \langle \mathbb{N}, 0, S \rangle$ es axiomatizable, completa y decidible, aunque no categórica.

Lo que haremos es precisar una serie de axiomas, A_S, y demostrar que TEO($\mathscr{N}_S$) = CON(A_S). Eligiendo A_S de manera que sus axiomas valgan en el modelo estándar, se demuestra que CON(A_S) $\subseteq$ TEO($\mathscr{N}_S$). Para demostrar que vale la igualdad veremos que CON(A_S) es una teoría completa.

¿Cómo demostrar que CON(A_S) es completa?

De hecho, lo podemos hacer de dos maneras: aplicando el denominado test de Vaught y utilizando el hecho de que admite eliminación de cuantificadores.

No desarrollaremos, por caer fuera de la Teoría de Modelos, las cuestiones relacionadas con la deciblidad de esta teoría. Solamente reseñaremos que el procedimiento de decisión es justamente el que nos proporciona el de eliminación de cuantificadores.

Desarrollando la noción de $\mathfrak{Z}$-cadena se demuestra la k-categoricidad de la teoría que nos ocupa. No es, empero, categoricidad a secas pues dos modelos con distinto número de $\mathfrak{Z}$-cadenas no pueden ser isomorfos.

He comentado ya la importancia de la propiedad de completud. Sin embargo, los procedimientos con los que contamos para demostrar que una teoría es completa son de dudosa utilidad. Veamos cuáles son: El primero es comprobar si, para cada

sentencia del lenguaje, o ella o su negación, es deducible en la teoría. El segundo es verificar esto mismo pero sustituyendo deducibilidad por consecuencia semántica. El tercero sería comprobar si los modelos de la teoría son, dos a dos, elementalmente equivalentes. En los tres casos necesitamos tratar con todas las sentencias. Otra posibilidad sería comprobar si coincide con la teoría de un sistema.

Cabe la posibilidad de que la teoría sea categórica. En ese caso, será también completa, pues sabemos que isomorfía implica equivalencia elemental. Y lo que es más, equivale a ello en las teorías con modelos finitos.

¿Hay más posibilidades? Estableceremos el llamado test de Vaught, que dice que son completas las teorías λ-categóricas (mayor o igual que la cardinalidad del lenguaje) que no tienen modelos finitos.

En los casos de teorías con modelos finitos completud y categoricidad son equivalentes. ¿Será completud equivalente a λ-categoricidad en las teorías que sólo tienen modelos infinitos? No, hay teorías completas que no son λ-categóricas para ningún λ.

Hay algunas teorías que poseen la propiedad de que cada una de las fórmulas del lenguaje en el que están escritas es equivalente a otra sin cuantificadores. El procedimiento de eliminación de cuantificadores es con frecuencia una prueba de la completud de la teoría, pero esto no significa que ser completa conlleve admisión de eliminación de cuantificadores, ni que admitirlos signifique que la teoría es completa. Por ejemplo, la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados admite eliminación de cuantificadores pero no es completa pues dos de distinta característica no validan las mismas sentencias. Y la de los órdenes densos con extremos en el lenguaje de los órdenes (sólo con $<$) es completa pero no admite eliminación de cuantificadores.

Hemos considerado ya los casos de teorías que caracterizan sus modelos hasta equivalencia elemental y hasta isomorfía. Otra posibilidad es que para cada dos modelos de la teoría tales que uno sea un subsistema del otro, sea también un subsistema elemental. A las teorías que caracterizan así sus modelos las llamamos modelo-completas. Son modelo-completas, por ejemplo, las teorías que admiten eliminación de cuantificadores. Sin embargo, hay teorías modelo-completas que no admiten eliminación de cuantificadores. Por ejemplo, la de cuerpos-real-cerrados en un lenguaje L sin $<$.

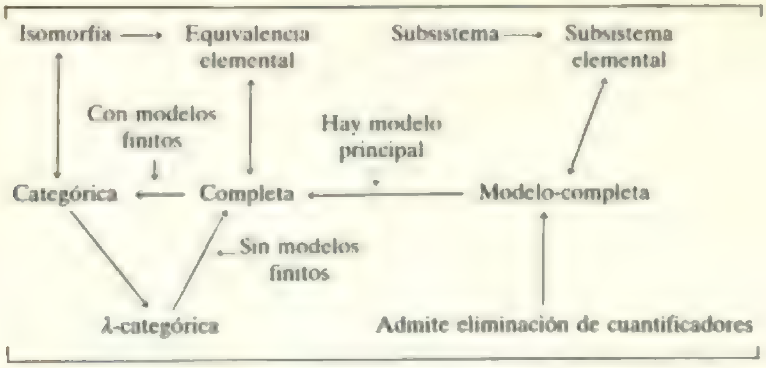
El concepto de modelo-completud nos permite establecer otro test de completud de teorías: el denominado test del modelo principal, de Robinson.

Los conceptos de completud y de modelo-completud no son comparables, ninguno de los dos incluye al otro: hay teorías completas que no son modelo-completas y viceversa. Abraham Robinson, el introductor del concepto de modelo-completud, nos presenta ejemplos de ambos tipos en su libro *Complete Theories*. Una teoría modelo-completa pero no completa es la de los cuerpos algebraicamente cerrados sin precisar característica. Una teoría completa pero no modelo-completa es la siguiente: Sea $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N} - \{0\}, < \rangle$ y consideremos TEO($\mathfrak{B}$). Esta teoría es completa pero no es modelo completa ya que el sistema $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, < \rangle$ es isomorfo al primero, $\mathfrak{B} \sqsubseteq \mathfrak{A}$ pero sin embargo $\mathfrak{B} \not\prec \mathfrak{A}$.

Los importantes resultados de este capítulo pueden resumirse en el siguiente cuadro:

TEORIA

Relación entre dos modelos



Propiedad de la teoría

1. COMPLETUD Y CATEGORICIDAD

En este apartado demostraremos algunos de los procedimientos de verificación de la propiedad de completud referida a teorías. Para ello utilizaremos los conceptos de categoricidad y de *k*-categoricidad; el primero de ellos no es nuevo, pues en el capítulo V y en el VI fueron apareciendo diversas teorías polimorfas, o, lo que es lo mismo, no categóricas.

La categoricidad es, como sabemos, una propiedad infrecuente, demasiado fuerte. Sin embargo, la *k*-categoricidad es algo más común. De hecho, muchas de las teorías completas son *k*-categóricas, aunque no todas.

El resultado más importante de este apartado es el test de completud de Vaught. Este teorema lo demostró Vaught en el 1954 en su artículo: «Applications of the Löwenheim-Skolem-Tarski Theorem to problems of completeness and decidability» y allí lo aplica para demostrar que son completas, entre otras las siguientes teorías:

1) La de los órdenes densos con extremos.
2) La de las álgebras de Boole sin átomos.
3) La de los grupos conmutativos infinitos en los que cada elemento es de orden p, con p primo.

Nosotros utilizaremos el test de Vaught para demostrar que son completas algunas teorías, entre ellas la de los órdenes densos sin extremos. No os extrañéis: de hecho son completas las teorías de los órdenes densos con extremos, sin ellos, y con cualquiera de los extremos: inferior o superior. No lo es la de los órdenes densos sin precisar si tiene extremos o no, pues dos órdenes densos cualesquiera —uno con extremos y el otro sin, por ejemplo— no son isomorfos. De hecho es verdad que la teoría tiene sólo un número finito, cuatro para ser precisos, de modelos numerables no isomorfos.

Al final del artículo mencionado Vaught señala que, aunque en el caso de las cinco teorías que él pone como ejemplo su completud había sido demostrada por otros métodos, el suyo es más sencillo. El método de la eliminación de cuantificadores, que es el que más se había usado anteriormente, tiene la desventaja de ser más engorroso, como vereis, y poco uniforme; los detalles varían mucho de una teoría a otra. Sin embargo, a diferencia del test de Vaught, es constructivo y permite una descripción detallada de las relaciones definibles en la teoría.

Vosotros conocereis los dos. En algunos casos la elección de uno u otro es materia de gusto, pues ambos son aplicables, en otros, lo es de necesidad, pues sólo se puede utilizar uno de ellos.

Hay también teorías completas que no son k-categóricas para ningún k y en ellas ninguno de estos métodos es aplicable. Es por eso por lo que en el apartado siguiente introduzco otros métodos para probar la completud de teorías.

1.1. Teorema

Sea $\Delta \subseteq \mathrm{SEN}(L)$. Δ es completo si y sólo si todos los modelos de Δ son elementalmente equivalentes.

Demostración

[$\Rightarrow$] Sea $\Delta \subseteq \mathrm{SEN}(L)$ completo. Queremos demostrar que para cada $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathrm{MOD}(\Delta)$ se cumple que $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$. Sabemos que para cada $\varphi \in \mathrm{SEN}(L)$ se cumple

$$\Delta \models \varphi \text{ o } \Delta \models \neg\varphi.$$

Por lo tanto, o bien ambos sistemas son modelos de φ o bien ninguno de los dos lo es.

[$\Leftarrow$] Supongamos que todos los modelos de Δ son elementalmente equivalentes. Sea $\varphi \in \mathrm{SEN}(L)$ y veamos que o bien $\Delta \models \varphi$ o bien $\Delta \models \neg\varphi$.

En efecto, si Δ no fuera consistente, $\Delta \vdash \varphi$, para cada φ. Y si Δ fuera consistente y $\mathscr{A}$ fuera uno de sus modelos, $\mathscr{A}$ sería modelo de φ o de $\neg\varphi$. En cualquiera de estos casos, no sólo $\mathscr{A}$, sino todos los demás modelos de Δ lo serán también ya que son elementalmente equivalentes. Por consiguiente,

$$\Delta \models \varphi \text{ o } \Delta \models \neg\varphi.$$

Evidentemente, Δ es completo. ■

1.2. Definición

Sea $T \subseteq \mathrm{SEN}(L)$ una teoría consistente.

i) T es categórica si y sólo si todos sus modelos son isomorfos.

ii) T es k-categórica si y sólo si:

a) T tiene un modelo de cardinalidad k, y

b) todos los modelos de cardinalidad k son isomorfos. □

1.3. Ejemplos

En lo que sigue pondremos ejemplos de teorías categóricas y k-categóricas. El que una teoría sea k-categórica, para algun k no significa que lo sea para todos. Ejemplos de ello aparecerán a continuación. Sin embargo, Morley* demostró que cuando una teoría es k-categórica con $\aleph_0 < k$ entonces es λ-categórica para todo λ, $\aleph_0 < \lambda$.

1) Es categórica la teoría T_n definida por la sentencia $\varphi_n \wedge \psi_n$ que expresa que hay exactamente n elementos. Esta teoría se escribe en un lenguaje que sólo contiene el signo de igualdad y sus modelos no tienen más que el universo, sin destacar ni funciones ni relaciones. Por consiguiente es absolutamente trivial el demostrar que es categórica ya que dos conjuntos finitos con el mismo número de elementos son biyectables.

2) Es también categórica la teoría de grupos de orden cuatro —es decir, de cuatro elementos— en donde cada elemento es de orden dos. Esta teoría es finitamente axiomatizable mediante: α_G, (del ejemplo 1) de V.1.2), junto con la sentencia $\varphi_4 \wedge \psi_4$ que afirma que el orden del grupo es cuatro y la sentencia $\forall x\ x + x = e$ —que también escribimos $\forall x\ 2 \cdot x = e$— que indica que el orden de cada elemento es dos. (Esto lo demostrasteis en el capítulo II, Problema 5).

3) Es k-categórica, para cada k, $\aleph_0 \leq k$, la teoría de los conjuntos infinitos. Es decir, $\Sigma = \{\varphi_n / n \in \omega\}$. Σ es k-categórica para cada k, pues dos conjuntos **A** y **B** con el mismo cardinal son biyectables y por lo tanto, $\langle \mathbf{A} \rangle$ y $\langle \mathbf{B} \rangle$ son isomorfos.

4) También es k-categórica la teoria $\mathbf{A}_S$ que axiomatiza a los naturales con el cero y la función del siguiente. A dicha teoria dedicaremos el último apartado de este capítulo.

5) La teoría de los órdenes densos sin extremos es $\aleph_0$-categórica. Demostraremos más adelante el celebrado teorema de Cantor según al cual dos conjuntos numerables sobre los que se ha definido un orden denso y sin extremos conforman sistemas isomorfos. Esta teoría no es $2^{\aleph_0}$-categórica y es por lo tanto un ejemplo de lo que decía antes: que el ser k-categórica para un cierto k no significa que lo sea para todos.

6) La teoría de las álgebras de Boole sin átomos es $\aleph_0$-categórica. Su prueba es similar a la de los órdenes densos, por un procedimiento en zig-zag.

* «Categoricity in power».

7) La teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de características p es k-categórica, si $k > \aleph_o$. Esta teoría no es $\aleph_0$-categórica y es un ejemplo que complementa al dado en 5): hay un divorcio enorme entre lo que ocurre al nivel numerable y al supernumerable. Esto avalaría la tesis de Kronecker, de finales del siglo pasado, según la cual dios creó a los números naturales y el hombre todos los demás (¡je, je!).

Como hemos comentado ya, la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados sin precisar características no es k-categórica para ningún k.

Los ejemplos 3) al 7) lo son de teorías a las que se puede aplicar el test de Vaught pues carecen de modelos finitos. El último de nuestros ejemplos será diferente.

8) La teoría de los grupos conmutativos en los que cada elemento es de orden p, con p primo, es k-categórica para cada k. Sin embargo, esta teoría no es completa pues tiene modelos finitos.

1.4. Lema

Si Δ es una teoría categórica, entonces Δ es completa.

Demostración

(Véase IV.1.3). ■

Acabamos de ver que las teorías categóricas son también completas. Evidentemente, no todas las teorías completas son categóricas, y de ello tenemos ya algunos ejemplos: TEO($\mathcal{N}$), el conjunto de las sentencias del lenguaje de la aritmética que son verdaderas en el sistema estándar de los naturales, es una teoría completa que no obstante posee modelos no isomorfos. Tampoco es categórica, aunque sí es completa, la teoría de los reales.

Sin embargo, aunque completud y categoricidad sean conceptos distintos, demostraremos que en el caso en que una teoría completa tenga algún modelo finito, dicha teoría es también categórica.

1.5. Teorema

Si Γ es una teoría completa y tiene un modelo finito, entonces Γ es categórica.

Demostración

Sea Γ una teoría completa y sea $\mathcal{A}$ un modelo finito de Γ. Si **A**, el universo de $\mathcal{A}$, tiene n elementos, $\mathcal{A}$ será modelo de $\varphi_n \wedge \psi_n$, la sentencia que lo afirma. Por ser Γ

completa, $\varphi_n \wedge \psi_n \in \Gamma$. Por consiguiente, si $\mathcal{B}$ fuera cualquier otro modelo de Γ, su universo también tendría n elementos, pues $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ al ser Γ completa.

Sea $\mathcal{B}$ un modelo cualquiera de Γ y demostremos que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Para hacerlo vamos a considerar una sucesión finita de lenguajes obtenidos por extensión del lenguaje inicial, L. Sean $L_1, L_2, \ldots, L_n$ los lenguajes obtenidos al añadir a L nuevas constantes individuales. Vamos a demostrar que $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ en el lenguaje L_n, siendo $\bar{\mathbf{a}}$ y $\bar{\mathbf{b}}$ enumeraciones completas, convenientemente definidas, de **A** y de **B**.

1.5.1. *Proposición*: Para cada $r \leq n$, se cumple: $\langle \mathcal{A}, \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \langle \mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_r} \rangle \rangle$

En efecto, cuando $r = 0$ no hay nada que demostrar pues $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Supongamos que la proposición vale para r y demostrémosla para $r + 1$. Es decir, sea $\langle \mathcal{A}, \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \langle \mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_r} \rangle \rangle$ y sea $L_{r+1} = L_r \cup \{c_r\}$.

Imaginemos que $\langle \mathcal{A}, \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{r+1} \rangle \rangle \not\equiv \langle \mathcal{B}, \langle \mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_r}, \mathbf{b} \rangle \rangle$ para ninguno de los **b** $\in \mathbf{B} - \{\mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_r}\}$ ¿Qué significa esto?

Esto quiere decir que para cada uno de estos **b** hay una sentencia $\sigma_b(c_1, \ldots, c_{r+1}) \in$ SEN(L_{r+1}) tal que $\langle \mathcal{A}, \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{r+1} \rangle \rangle$ es modelo de σ_b pero $\langle \mathcal{B}, \langle \mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_r}, \mathbf{b} \rangle \rangle$ es modelo de $\neg\sigma_b$.

Consideremos el conjunto finito de fórmulas

$$\{\sigma_b(c_1, \ldots, c_r, x) \;/\; \mathbf{b} \in \mathbf{B} - \{\mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_r}\}\} \cup \{c_j \neq x / j = 1 \ldots r)$$

Llamaremos $\delta(c_1, \ldots, c_r, x)$ a la conyunción del conjunto de fórmulas anterior.

Es fácil ver que

$$\langle \mathcal{A}, \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \rangle [\mathbf{a}_{r+1}] \text{ es modelo de } \delta\,(c_1, \ldots, c_r, x)$$

(pues $\langle \mathcal{A}, \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \rangle$ es modelo de cada una de las σ_b y, además, $\mathbf{a}_j \neq \mathbf{a}_{r+1}$ para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$).

Por consiguiente, $\langle \mathcal{A}, \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \rangle$ es modelo de $\exists x\, \delta(c_1, \ldots, c_r, x)$.

Pero, por hipótesis de inducción,

$$\langle \mathcal{A}, \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \langle \mathbf{b}_{i1}, \ldots, \mathbf{b}_{1_r} \rangle \rangle$$

y por lo tanto, este último sistema ha de ser modelo de $\exists x\, \delta(c_1, \ldots, c_r, x)$. Es decir, tiene que haber un cierto **b** tal que

$$\langle \mathcal{B}, \langle \mathbf{b}_{i1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_r} \rangle \rangle [\mathbf{b}] \text{ es modelo de } \delta\,(c_1, \ldots, c_r, x)$$

y este **b** será $\mathbf{b} \in \mathbf{B} - \{\mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_r}\}$ ya que entre las fórmulas que integran δ están las $c_j \neq x$.

Sabemos que esto es imposible porque $\langle \mathcal{B}, \langle \mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_r} \rangle \rangle [\mathbf{b}]$ es modelo de $\neg\sigma_b(c_1, \ldots, c_r)$ para cada $\mathbf{b} \in \mathbf{B} - \{\mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_r}\}$.

Así que $\langle \mathcal{A}, \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{r+1} \rangle \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \langle \mathbf{b}_{i1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_{r+1}} \rangle \rangle$ para un cierto $\mathbf{b}_{i_{r+1}}$.

La conclusión es que $\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$, siendo $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ una enumeración completa de **A** y $\bar{\mathbf{b}} = \langle \mathbf{b}_{i_1}, \ldots, \mathbf{b}_{i_n} \rangle$ una enumeración completa de **B**. En estas circunstancias, utilizando el teorema IV.6.2, concluimos que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. ■

1.6. Teorema. Test de completud (Vaught, 1954)

Sea Γ una teoría de cardinalidad k que no tiene modelos finitos. Si Γ es λ-categórica para un $\lambda \geq k$ (λ siendo infinito), entonces Γ es completa.

Demostración

Supongamos que Γ no es completa pero es λ-categórica y que no tiene modelos finitos. Por no ser completa tiene que haber una sentencia φ tal que ni $\Gamma \models \varphi$, ni $\Gamma \models \neg\varphi$. Tanto $T_1 = \Gamma \cup \{\varphi\}$ como $T_2 = \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ son consistentes. El motivo es que si T_1 fuera inconsistente, $T_1 \vdash \neg\varphi$ y por lo tanto, $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Y lo mismo, si T_2 fuera inconsistente, $\Gamma \vdash \varphi$.

Siendo consistentes, tanto T_1, como T_2 tendrán modelos que, por hipótesis, no son finitos. Por Löwenheim-Skolem, tienen modelos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de cardinalidad λ. Pero Γ es λ-categórica y por lo tanto, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Esto es imposible porque $\mathcal{A}$ era modelo de T_1 y, por lo tanto, de φ, mientras que $\mathcal{B}$ lo era de T_2 y, por consiguiente, de $\neg\varphi$. ■

1.7. Teorema (Cantor 1895)

Si $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, < \rangle$ y $\mathcal{B} = \langle \mathbf{B}, < \rangle$ son sistemas numerables con estructura de orden denso y sin extremos, entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Demostración

Sea $\langle \mathbf{a}_n \rangle_{n<\omega} = \bar{\mathbf{a}}$ una enumeración de **A** completa y sin repeticiones, que no tiene porqué respetar el orden de $\mathcal{A}$. Y sea $\bar{\mathbf{b}} = \langle \mathbf{b}_n \rangle_{n<\omega}$ una enumeración de **B** de las mismas características.

Vamos a definir una función $\mathbf{h}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ que sea biyectiva y que preserve el orden; es decir,

$$\mathbf{h}(\mathbf{a}_i) < \mathbf{h}(\mathbf{a}_j) \text{ en } \mathcal{B} \text{ syss } \mathbf{a}_i < \mathbf{a}_j \text{ en } \mathcal{A}, \text{ para cada } i, j.$$

El procedimiento será en zig-zag y utilizando inducción; en las etapas pares —para $n = 2m$— nos aseguramos de que $\mathbf{h}(\mathbf{a}_0), \mathbf{h}(\mathbf{a}_1), \ldots, \mathbf{h}(\mathbf{a}_m)$ haya sido definido y en las etapas impares —para $n = 2m + 1$— de que $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ estén en el recorrido de $\mathbf{h}$.

Para ello vamos a enumerar **A** y **B** en sendas enumeraciones $\mathbf{a}'$ y $\mathbf{b}'$, con muchas repeticiones, pero acopladas; es decir,

$$\mathbf{a}'_j < \mathbf{a}'_k \text{ syss } \mathbf{b}'_j < \mathbf{b}'_k \text{ para } j, k < \omega.$$

La idea es que $\langle \mathbf{a}'_n, \mathbf{b}'_n \rangle \in \mathbf{h}$.

1.7.1. *Enumeraciones* $\bar{\mathbf{a}}'$ *y* $\bar{\mathbf{b}}'$

Definiremos $\bar{\mathbf{a}}' = \langle \mathbf{a}'_n \rangle_{n<\omega}$ y $\bar{\mathbf{b}}' = \langle \mathbf{b}'_n \rangle_{n<\omega}$.
Actuaremos por inducción:

1) $n = 0$. Simplemente $\mathbf{a}'_0 = \mathbf{a}_0$ y $\mathbf{b}'_0 = \mathbf{b}_0$

2) $0 < n < \omega$. Hay dos casos posibles: que n sea par o que sea impar.
Primer caso: $n = 2m$.
Definiremos $\mathbf{a}'_n$ y $\mathbf{b}'_n$ de forma que $\langle \mathbf{a}'_n, \mathbf{b}'_n \rangle = \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_t \rangle$ fijando $\mathbf{a}'_n = \mathbf{a}_m$ y eligiendo $\mathbf{b}_t$ de la siguiente manera:

Si $\mathbf{a}_m$ estaba ya en $\{\mathbf{a}'_0, ..., \mathbf{a}'_{n-1}\}$, ocupando la posición $k < n$, entonces $\mathbf{b}_t = \mathbf{b}'_k$. Es decir, respetamos lo ya definido.
Si $\mathbf{a}_m$ no es ninguno de los $\{\mathbf{a}'_0, ..., \mathbf{a}'_{n-1}\}$, elegiremos $\mathbf{b}_t$ de manera que mantenga la misma relación de orden con $\{\mathbf{b}'_0, ..., \mathbf{b}'_{n-1}\}$ que $\mathbf{a}'_n$ mantiene con $\{\mathbf{a}'_0, ..., \mathbf{a}'_{n-1}\}$. Es decir, para cada $j \in \{1, ..., n-1\} : \mathbf{b}_t < \mathbf{b}'_j$ syss $\mathbf{a}_m < \mathbf{a}'_j$. Un tal $\mathbf{b}_t \in \mathbf{B}$ siempre existe; de hecho, hay muchos y se trata de coger el primero de ellos, en la enumeración $\bar{\mathbf{b}}$ inicial.

Segundo caso: $n = 2m + 1$.
Definiremos $\mathbf{a}'_m$ y $\mathbf{b}'_n$ de forma que $\langle \mathbf{a}'_n, \mathbf{b}'_n \rangle = \langle \mathbf{a}_s, \mathbf{b}_m \rangle$ fijando $\mathbf{b}'_n = \mathbf{b}_m$ y eligiendo $\mathbf{a}_s$ de la siguiente forma:
Si $\mathbf{b}_m$ estaba ya en $\{\mathbf{b}'_0, \mathbf{b}'_1, ..., \mathbf{b}'_{n-1}\}$, ocupando la posición $k < n$, entonces $\mathbf{a}_s = \mathbf{a}'_k$. Es decir, respetamos lo ya definido.
Si $\mathbf{b}_m$ no está en $\{\mathbf{b}'_0, \mathbf{b}'_1, ..., \mathbf{b}'_{n-1}\}$, elegiremos $\mathbf{a}_s$ de manera que mantenga la misma relación de orden con $\{\mathbf{a}'_0, \mathbf{a}'_1, ..., \mathbf{a}'_{n-1}\}$ que $\mathbf{b}'_n$ mantiene con $\{\mathbf{b}'_0, \mathbf{b}'_1, ..., \mathbf{b}'_{n-1}\}$. Es decir, para cada $j \in \{1, ..., n-1\} : \mathbf{b}_m < \mathbf{b}'_j$ syss $\mathbf{a}_s < \mathbf{a}'_j$. También en este caso sabemos que un tal $\mathbf{a}_s$ existe.

1.7.2. *Definición de* **h**

Para cada natural, $n : \mathbf{h}(\mathbf{a}'_n) = \mathbf{b}'_n$.
Hace falta demostrar que **h** es una función de **A** en **B** biyectiva y que respeta el orden. Este es el contenido de la siguiente proposición.

1.7.3. *Proposición* $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

Lo demostrareis vosotros, es el Problema 4. ■

1.8. Lema

Suponed que $\mathfrak{R}_< = \langle \mathbb{R}, < \rangle$ es el orden de los reales y que $\mathfrak{R}' = \langle \mathbb{R}', < \rangle$ es el sistema obtenido al quitar el cero. Entonces, $\mathfrak{R}_< \not\cong \mathfrak{R}'$.

Demostración

Suponed que $\mathfrak{R}_< \cong \mathfrak{R}'$ y sea $\mathbf{h}$ el isomorfismo.

Para cada $n \neq 0$, $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}'$. Sea p_n el inverso de $\frac{1}{n}$ en $\mathbf{h}$; es decir, $\mathbf{h}(p_n) = \frac{1}{n}$. Por ser isomorfismo, deberá preservar el orden: $p_n < p_{n-1} < \ldots < p_1$. Por lo tanto, la sucesión $\langle p_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ tiene cota inferior; como por ejemplo, q, donde $\mathbf{h}(q) = -1$.

Por tener $\mathbb{R}$ un orden completo, $\langle p_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ converge hacia un cierto $p \in \mathbb{R}$; $\mathbf{h}(p) < \mathbf{h}(p_n)$, para cada n. Por lo tanto, $\mathbf{h}(p) < 0$.

Por ser el orden denso, hay un $r \in \mathbb{R}'$ tal que $\mathbf{h}(p) < r < 0$ y $r < \mathbf{h}(p_n) = \frac{1}{n}$ para cada n, pues son mayores que cero. Puesto que p es el ínfimo de $\langle p_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{h}^{-1}(r) \leq p$. Esto es una contradicción, puesto que de $\mathbf{h}(p) < r$ se sigue que $p < \mathbf{h}^{-1}(r)$.

Puesto que la contradicción proviene de suponer que exista el isomorfismo, hemos demostrado que $\mathfrak{R}_<$ no es isomorfo a $\mathfrak{R}'$. ■

1.9. *Ejercicios*

1) En el teorema VII.1.5 ¿cuál sería la bifunción de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ que me permite concluir que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$?

2) Demostrad que la teoría de la identidad, Δ, en un lenguaje con un número infinito-numerable de constantes individuales es k-categórica para $k > \aleph_0$, pero no es $\aleph_0$-categórica.

Es decir, hay que demostrar que

$$\Delta = \{I_1, I_2, I_3\} \cup \{c_i \neq c_j \,/\, i \neq j \wedge i, j \in \mathbb{N}\}$$

tiene estas propiedades siendo:

$$I_1 = \forall x x = x,\ I_2 = \forall xy\,(x = y \rightarrow y = x),$$
$$I_3 = \forall xyz\,(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$$

3) Demostrad que la condición de que Γ no tenga modelos finitos en el test de completud de Vaught (VII.1.6) es necesaria. Para ello pensad en la teoría de la identidad.

4) Demostrad que las siguientes teorías de conjuntos densamente ordenados son $\aleph_0$-categóricas:

a) Con primer y último elemento.

b) Con primer pero no último elemento.

c) Con último pero no primer elemento.

5) Haced una lista, lo más larga posible, de teorías completas. Demostrad de al menos una de ellas que lo es.

6) Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras de Boole sin átomos numerables. Probad que son isomorfas. La demostración, que no es fácil, es siguiendo un procedimiento en zig-zag semejante al del Teorema de Cantor; no es de extrañar: la condición de «sin átomos» es semejante a la de «denso» para el orden. Os ayudará el considerar en vez de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ los retículos correspondientes.

Problema 1 (Jugando a detectives)

Sabemos que un teorema análogo al VII.1.5 no funciona cuando no tiene la teoría ningún modelo finito. Sin embargo, a primera vista tal vez no se descubra donde fallaría esta prueba si **A** fuera infinito.

¿Podríais decirme dónde está el talón de Aquiles de esta demostración?

Problema 2

Demostrad que la teoría de los órdenes densos sin extremos no es categórica en la cardinalidad $2^{\aleph_0}$, la del continuo.

Problema 3

Sea $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \sim \rangle$, donde $\sim$ es una relación de equivalencia, con un conjunto numerable de clases de equivalencia, cada clase, infinita. ¿Es TEO($\mathcal{A}$) $\aleph_0$-categórica? ¿Es axiomatizable? ¿Finitamente? ¿Es TEO($\mathcal{A}$) k-categórica para $k > \aleph_0$?

Problema 4

Comprobad que Cantor tenía buenas ideas (proposición 1.7.3).

2. ELIMINACION DE CUANTIFICADORES

Ciertos conjuntos de sentencias y en especial, ciertas teorías, permiten la eliminación de cuantificadores. Esto quiere decir lo siguiente: si $\Gamma \subseteq \mathrm{SEN}(\mathrm{L})$ admite eliminación de cuantificadores, toda fórmula de L es equivalente en Γ a una sin cuantificar y con las mismas variables libres.

Tres ventajas fundamentales suelen derivarse del procedimiento de eliminación de cuantificadores:

a) Cuando sabemos que el conjunto de las sentencias verdaderas en un sistema —es decir, la teoría de un sistema— admite eliminación de cuantificadores, las relaciones definibles en el sistema forman un conjunto fácil de caracterizar.

b) Como veremos en lo que sigue, la eliminación de cuantificadores está ligada a la noción de modelo-completud y a la de completud de teorías.

c) La eliminación de cuantificadores acostumbra a ser un procedimiento de decisión de teorías; es decir, si Γ es una teoría que admite eliminación de cuantificadores, con frecuencia Γ es decidible: hay un método efectivo para determinar si una sentencia cualquiera está en la teoría o no.

En este apartado demostraremos que ciertas teorías admiten eliminación de cuantificadores: concretamente, la de los órdenes densos sin extremos y la teoría del sistema $\mathcal{N}_S$ —los naturales con el cero y el siguiente—. Tened en cuenta que una teoría es un conjunto de sentencias y que el lenguaje en el que vengan escritas éstas es determinante por lo que a la admisión de eliminación de cuantificadores se refiere. Lo que quiero decir es lo siguiente: cuando hablamos, por ejemplo, de grupos tenemos tendencia a pensar que puesto que siempre que tenemos un sistema $\mathcal{G} = \langle G, \mathbf{e}, \perp \rangle$ que tiene dicha estructura tenemos un $\mathcal{G}' = \langle G, \mathbf{e}, \perp, ^{-} \rangle$ que lo es también —y viceversa—, el tipo del sistema y en consecuencia el lenguaje para hablar de él es indiferente. Nada más falaz, la clase $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{M}_{\langle 0,2,1;\varnothing \rangle}$ de los grupos de tipo $\langle 0,2,1; \varnothing \rangle$ tiene distintas propiedades que la $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}_{\langle 0,2;\varnothing \rangle}$, de los grupos de tipo $\langle 0,2; \varnothing \rangle$ —por ejemplo, todo subsistema de un $\mathcal{G}' \in \mathcal{K}'$ es también un grupo, mientras que no sucede lo mismo con los subsistemas de sistemas $\mathcal{G} \in \mathcal{K}$—. De forma similar, puesto que $\mathrm{TEO}(\mathcal{K})$ y $\mathrm{TEO}(\mathcal{K}')$ son distintos conjuntos de sentencias, no tienen las mismas propiedades.

En este apartado catalogaré algunas de las teorías que admiten eliminación de cuantificadores, concretamente las que aparecen en *Elements of Mathematical Logic* de Kreisel y Krivine, cuya prueba podeis encontrar allí.

También explotaremos esta, infrecuente pero útil, propiedad de eliminación de cuantificadores en la línea dada en b), en relación a la completud y a la modelo-completud. Como Problema 5 propuesto teneis el de demostrar que en $\mathcal{N}_S$ sólo se pueden definir los conjuntos finitos y los cofinitos; siendo ésta una aplicación en la línea de a). No nos aventuraremos, sin embargo, en la línea de c), aunque volverá a mencionarse.

El método de la eliminación de cuantificadores es incluso más antiguo que la propia Teoría de Modelos. Como señala Hodges*, fue Skolem quien, en 1919,

* «The present aims of model theory.»

introdujo la técnica de la eliminación de cuantificadores para determinar las relaciones definibles en un sistema determinado. Fue Tarski quien en sus seminarios —cuando todavía estaba en Varsovia— vio que el método de Skolem podía proporcionar un programa de investigación sistemática en lógica. El denominado programa de Tarski, al que él y numerosos estudiantes se sumaron, consistía en el estudio de ciertas clases de sistemas de estructuras conocidas a la luz del método de eliminación de cuantificadores. Presburger estudió los números naturales con la suma, Szmielew los grupos conmutativos y Mostowski los sistemas con estructura de buen orden.

2.1. Catálogo de teorías que admiten eliminación de cuantificadores

Admiten eliminación de cuantificadores, entre otras que no menciono, las siguientes:

1) Ordenes densos con primer y último elemento en un lenguaje L que contiene: dos contantes individuales, 0 y 1, para el primer y el último elemento, el relator $<$ para el orden estricto y, como siempre, la igualdad. Es imprescindible que el lenguaje utilizado contenga todos estos signos peculiares y en especial 0 y 1.

Los axiomas de esta teoría son:

$$\alpha_1 \equiv \forall x \neg x < x$$

$$\alpha_2 \equiv \forall xyz\,(x < y \wedge y < z \rightarrow x < y)$$

$$\alpha_3 \equiv \forall xy\,(x = y \vee x < y \vee y < x)$$

$$\alpha_4 \equiv \forall xy\, \exists z(x < y \rightarrow x < z \wedge z < y)$$

$$\alpha_5 \equiv \forall x\,(x = 0 \vee 0 < x)$$

$$\alpha_6 \equiv \forall x\,(x = 1 \vee x < 1)$$

$\alpha_1 \wedge \alpha_2$ expresa que $<$ es un orden estricto. $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ dice que $<$ es un orden lineal. α_4 dice que el orden es denso. α_5 dice que el 0 es el primer elemento y α_6 expresa que 1 es el último elemento.

Esta teoría no sólo admite eliminación de cuantificadores, sino que es también completa pues toda sentencia de L es equivalente en la teoría a una de estas tres: $0 < 1$, $0 = 1$ ó $1 < 0$. La primera es derivable pero ninguna de las otras dos lo es.

2) Ordenes discretos sin primer ni último elemento en un lenguaje de tipo $\langle 1;2 \rangle$ con un functor monario, s, y dos relatores binarios: $<$ y $=$.

Los axiomas de esta teoría son: $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ del ejemplo anterior para órdenes lineales estrictos y

$$\alpha_7 \equiv \forall xy\,(x < y \leftrightarrow y = sx \vee sx < y)$$

$$\alpha_8 \equiv \forall x\, \exists y\, x = sy$$

Es fundamental que el lenguaje contenga el functor s para denotar el sucesor pues se puede demostrar que hay una teoría, escrita en un lenguaje que no tiene s, que tiene básicamente los mismos modelos (quitándole, naturalmente la función sucesor del sistema) pero que no admite eliminación de cuantificadores. En esa teoría α_7 y α_8 se sustituyen por

$$\alpha_7' \equiv \forall x\, \exists y\, \forall z\, (x < z \leftrightarrow y = z \vee y < z)$$

$$\alpha_8' \equiv \forall x\, \exists y\, \forall z\, (z < x \leftrightarrow y = z \vee z < y)$$

Escrita en L y tomando α_7 y α_8 la teoría admite eliminación de cuantificadores y es completa.

3) Algunos grupos conmutativos que poseen órdenes lineales y discretos. También aquí el lenguaje es determinante pudiéndose demostrar que dependiendo de la axiomatización establecemos una teoría que admite eliminación de cuantificadores o no la admite.

4) Cuerpos algebraicamente cerrados. El lenguaje usado para describir la teoría posee dos constantes individuales, un functor monario y dos functores binarios. Los axiomas son la formalización en ese lenguaje de las propiedades de la estructura de cuerpo algebraicamente cerrado que comentamos en el capítulo I. Concretamente:

$$\alpha_9 \equiv \forall xyz\, (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$\alpha_{10} \equiv \forall xy \quad x + y = y + x$$

$$\alpha_{11} \equiv \forall x \quad x + e = x$$

$$\alpha_{12} \equiv \forall x \quad x + x^* = e$$

$\alpha_9 \wedge \ldots \wedge \alpha_{12}$ expresan que el grupo es conmutativo

$$\alpha_{13} \equiv \forall xyz\, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$\alpha_{14} \equiv \forall xy \quad x \cdot y = y \cdot x$$

$$\alpha_{15} \equiv \forall x \quad x \cdot u = x$$

$$\alpha_{16} \equiv \forall x \quad \exists y\, (x = e \vee x \cdot y = u)$$

$$\alpha_{17} \equiv \forall xyz\, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$\alpha_{18} \equiv e \neq u$$

$\alpha_9 \wedge \ldots \wedge \alpha_{18}$ expresan que es un cuerpo conmutativo.

Finalmente, para cada natural $n > 1$ la fórmula:

$$\beta \equiv \forall x_0 \ldots x_{n-1}\, \exists x\, (x_0 + x_1 \cdot x + \ldots + x_{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n = e)$$

donde como sabéis x^m es una abreviatura de $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (m veces).

Las sentencias β expresan que todo polinomio con coeficientes en el cuerpo posee una raíz.

Este ejemplo es de gran interés porque motivado por el estudio de los cuerpos algebraicamente cerrados Robinson introdujo el concepto de modelo-completud. De los ejemplos mencionados hasta ahora es el único que admitiendo eliminación de cuantificadores no es completa. De hecho, cuando añadimos a la teoría la especificación de característica nos encontramos con una teoría completa.

5) Cuerpos-real-cerrados y ordenados. Esta teoría tiene que estar escrita en el lenguaje de los cuerpos ordenados; es decir, con: dos constantes individuales, dos functores binarios, y uno monario y lo que es fundamental, el relator binario para el orden. Hace falta que esté el orden pues, aunque puede definirse con otros signos, necesitamos un particularizador que no puede eliminarse después. Es por esto por lo que los cuerpos-real-cerrados constituyen una teoría modelo-completa que no admite eliminación de cuantificadores cuando falta el $<$.

Los axiomas de la teoría de los cuerpos real cerrados y ordenados son:

$\alpha_9 \wedge \ldots \wedge \alpha_{18}$, los axiomas de cuerpo conmutativo.

$$\alpha_{19} \equiv \forall xy\ (x > e \wedge y > e \rightarrow x + y > e)$$

$$\alpha_{20} \equiv \forall x\ \ (x = e \vee x < e \vee x^* < e)$$

$$\alpha_{21} \equiv \forall x\ \ \neg(x < e \wedge x^* < e)$$

$$\alpha_{22} \equiv \forall xy\ (x > e \wedge y > e \rightarrow x \cdot y > e)$$

$\alpha_9 \wedge \ldots \wedge \alpha_{22}$ expresa que el cuerpo es ordenado.

Además, para los cuerpos-real-cerrados añadimos

$$\gamma_1 \equiv \forall xy\ (x = y^2 \vee x^* = y^2)$$

y para cada $n > 1$

$$\varrho_n \equiv \forall x_0 \ldots x_{2n}\ \exists x(x_0 + x_1 \cdot x + \ldots + x_{2n} \cdot x^{2n} + x^{2n+1} = e)$$

Así escrita, la teoría de los cuerpos realmente cerrados y ordenados admite eliminación de cuantificadores y es completa.

6) Anillos de Boole separables. También en este caso la elección del lenguaje es importante pues se obtienen distintos resultados en función de esta elección.

2.2. Test para la eliminación de cuantificadores

Como sabeis (V.3.11.2), decimos que $\Gamma \subseteq SEN(L)$ admite eliminación de cuantificadores si y sólo si para cada $\varphi \in FOR(L)$ hay una $\psi \in FOR(L)$ tal que ψ no está cuantificada, $LBR(\varphi) = LBR(\psi)$ y $\Gamma \models \varphi \leftrightarrow \psi$. $\square$

A continuación enuncio y demuestro un teorema muy útil a la hora de demostrar que un cierto Γ admite eliminación de cuantificadores: no tendremos que demostrar que cada una de las fórmulas del lenguaje es equivalente a una sin cuantificar, sino únicamente que ciertas particularizaciones lo son. El enunciado del teorema es el siguiente:

Sea $\Gamma \subseteq \text{SEN(L)}$. Supongamos que para cada fórmula φ de la forma $\exists x\,(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$ —donde cada α_i es una fórmula simple o la negación de una fórmula simple— existe una fórmula $\psi \in \text{FOR(L)}$ con $\text{LBR}(\varphi) = \text{LBR}(\psi)$ tal que $\Gamma \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$. En tal caso, Γ admite eliminación de cuantificadores.

Demostración

Sea cada φ de la forma $\exists x(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n)$ equivalente en Γ a una fórmula sin cuantificadores y con las mismas variables libres que φ. Queremos demostrar que toda fórmula, cualquiera que sea su forma, es equivalente en Γ a una sin cuantificadores y con las mismas variables libres.

La prueba será por inducción semiótica.

F1) Si α es una fórmula simple, por carecer de cuantificadores el teorema está resuelto ya que, trivialmente, $\Gamma \vDash \alpha \leftrightarrow \alpha$.

F2) Supongamos que para un α cualquiera, $\Gamma \vDash \alpha \leftrightarrow \psi$ (siendo ψ conforme a los requisitos). Evidentemente también $\neg\alpha$ es Γ equivalente a una descuantificada, a saber, $\neg\psi$.

F3) Si $\Gamma \vDash \alpha \leftrightarrow \psi_1$ y $\Gamma \vDash \beta \leftrightarrow \psi_2$ entonces hay una ψ_3 sin cuantificadores tal que $\Gamma \vDash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \psi_3$; a saber, $\psi_1 \wedge \psi_2$.

De forma similar para el resto de los conectores:

F4) Si se cumple para α; es decir, si $\Gamma \vDash \alpha \leftrightarrow \psi$, también se cumple para $\exists x\alpha$.

Para demostrar F4) demostraré previamente lo siguiente:

2.2.1. *Proposición*: Si β es una fórmula sin cuantificadores, entonces $\Gamma \vDash \exists x\,\beta \leftrightarrow \psi'$ donde $\text{LBR}(\exists x\beta) = \text{LBR}(\psi')$ y ψ' no tiene cuantificadores.

En efecto, β es lógicamente equivalente a una fórmula en forma normal conyuntiva (Ejercicio, 8) de II.2.8). Es decir,

$$\vDash \beta \leftrightarrow (\beta_1^1 \wedge \ldots \wedge \beta_{n_1}^1) \vee \ldots \vee (\beta_1^m \ldots \beta_{n_m}^m).$$

Por consiguiente,

$$\vDash \exists x\beta \leftrightarrow \exists x(\beta_1^1 \wedge \ldots \wedge \beta_{n_1}^1) \vee \ldots \vee \exists x(\beta_1^m \wedge \ldots \wedge \beta_{n_m}^m)$$

Por la hipótesis de este teorema sabemos que para cada i, $i \in \{1, \ldots, m\}$ se verifica:

$$\Gamma \models \exists x\, (\beta_1^i \wedge \ldots \wedge \beta_{n_i}^i) \leftrightarrow \psi_i$$

donde ψ_i no tiene cuantificadores y

$$\mathrm{LBR}(\exists x\, (\beta_1^i \wedge \ldots \wedge \beta_{n_i}^i) = \mathrm{LBR}(\psi_i)$$

De aquí se sigue que

$$\Gamma \models \exists x\beta \leftrightarrow \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m \text{ con } \mathrm{LBR}(\exists x\beta) = \mathrm{LBR}(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m),$$

$\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$ sin cuantificadores.

Utilizando esta proposición es fácil demostrar que si $\Gamma \models \alpha \leftrightarrow \psi$ (con $\mathrm{LBR}(\alpha) = \mathrm{LBR}(\psi)$ siendo ψ sin cuantificar), también $\Gamma \models \exists x\alpha \leftrightarrow \psi^*$ (Con $\mathrm{LBR}(\exists x\alpha) = \mathrm{LBR}(\psi^*)$, siendo ψ^* sin cuantificar).

En efecto, de $\Gamma \models \alpha \leftrightarrow \psi$ se sigue que $\Gamma \models \exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\psi$ y puesto que ψ no tiene cuantificadores, sabemos por la proposición que $\Gamma \models \exists x\ \psi \leftrightarrow \psi^*$, para una cierta fórmula sin cuantificar y tal que $\mathrm{LBR}(\exists x\psi) = \mathrm{LBR}(\psi^*)$. De todo esto se sigue que

$$\Gamma \models \exists x\alpha \leftrightarrow \psi^* \text{ y que } \mathrm{LBR}(\exists x\alpha) = \mathrm{LBR}(\psi^*).$$

2.3. Proposición

Sea $\mathrm{TEO}(\mathscr{A})$ el conjunto de las sentencias verdaderas en $\mathscr{A}$, escritas en L adecuado a $\mathscr{A}$. $\mathrm{TEO}(\mathscr{A})$ admite eliminación de cuantificadores si y sólo si para cada $\varphi \in \mathrm{FOR}(\mathrm{L})$ existe $\psi \in \mathrm{FOR}(\mathrm{L})$ —con $\mathrm{LBR}(\varphi) = \mathrm{LBR}(\psi)$, ψ sin cuantificadores— tal que para cada asignación $\mathscr{I}$, $\mathscr{A}\mathscr{I}$ es modelo de $\varphi \leftrightarrow \psi$.

Demostración

Es tan fácil que no la hago. ■

2.4. Teorema

$\mathrm{TEO}(\mathscr{N}_S)$ admite eliminación de cuantificadores.

Demostración

Sabemos por el teorema VII.2.2 que nos bastará con probar que para cada φ de la forma $\exists x\, (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_q)$ —siendo cada α_i una fórmula atómica o la negación de una

fórmula atómica— hay una fórmula ψ sin cuantificadores y con las mismas variables libres tal que:

$$\mathcal{N}_S\mathcal{I} \text{ es modelo de } \varphi \leftrightarrow \psi, \text{ para cada asignación } \mathcal{I}.$$

Notación

En esas circunstancias diremos que las fórmulas φ y ψ son equivalentes.

Puesto que los signos peculiares de $L(\mathcal{N}_S)$ son f y c, cada α_i es de la forma $f^m t_1 = f^n t_2$ o una negación de ella. Aquí cada t_i es una variable, o la constante c y f^m se define así:

$$f^0\tau = \tau, f^{m+1}\tau = f^m f\tau.$$

Para simplificar la prueba podemos suponer:

1.º) La variable x está en cada α_i.

2.º) Ningún α_i es $f^m x = f^n x$, ni su negación; es decir, x no está en los dos términos.

La justificación del 1.º) es que si x no está en α_i entonces

$$\models \exists x (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_q) \leftrightarrow \alpha_i \wedge \exists x (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{i-1} \wedge \alpha_{i+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_q)$$

Para justificar lo 2.º) pensad que $f^m x = f^n x$ se sustituye por $c = c$ si $m = n$ y por $c \neq c$, si $m \neq n$.

Distinguiremos dos casos:

1.er) *Caso:* Cada α_i es de la forma $\neg f^{m_i} x = f^{n_i} t_i$.

Se puede demostrar que:

$$\mathcal{N}_S\mathcal{I} \text{ es modelo de } \exists x(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_q) \leftrightarrow \bigwedge\nolimits_{1 \leq i \leq q} t_i = t_i$$

(pensad que dado un $\mathbf{b} \in \mathbb{N}$ siempre se puede encontrar un $\mathbf{a} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{N}_S[\mathbf{ab}] \text{ sat } \neg f^m x = f^n t).$$

2.º) *Caso:* Hay al menos un α_i que no es una negación.

Sea

$$\varphi \equiv \exists x(f^{m_1}x = f^{n_1}t_1 \wedge \ldots \wedge f^{m_i}x = f^{n_i}t_i \wedge \neg f^{m_{i+1}}x = f^{n_{i+1}}t_{i+1} \wedge \ldots \wedge \neg f^{m_q}x = f^{n_q}t_q)$$

Esta fórmula es equivalente a:

$$\exists x(f^{p}x = f^{r_1}t_1) \wedge \ldots \wedge f^{p}x = f^{r_i}t_i \wedge \neg f^{p}x = f^{r_{i+1}}t_{i+1} \wedge \ldots \wedge \neg f^{p}x = f^{r_q}t_q)$$

Y esta equivale a:

$$\exists x(f^{p}x = f^{r_1}t_1) \wedge \bigwedge_{1<j\leq i} f^{r_1}t_1 = f^{r_j}t_j \wedge \bigwedge_{i<j\leq q} \neg f^{r_1}t_1 = f^{r_j}t_j$$

Pero $\exists x\ (f^{p}\ x = f^{r_1}\ t_1)$ es equivalente a

$$\neg f^{r_1}\ t_1 = c \wedge \neg f^{r_1}\ t_1 = fc \wedge \ldots \wedge \neg f^{r_1}\ t_1 = f^{p-1}c$$

—se demuestra por inducción sobre p—.

Hemos, pues, conseguido una formula equivalente a φ sin cuantificadores. ■

2.5. Teorema

La teoría de los órdenes densos sin extremos admite eliminación de cuantificadores.

Demostración

Sea Δ la teoría de los órdenes densos sin extremos; es decir,

$$\Delta = \{\varphi \in \mathrm{SEN}(\mathrm{L}) / \bigwedge_{1\leq i\leq 8} \gamma_i \vDash \varphi\}$$

—donde L y los γ_i son, respectivamente, el lenguaje de los ordenes (véase II.3.3) y los axiomas que en dicho apartado se formulan—.

Basándome en VII.2.2 sólo necesito demostrar que cada φ de la forma $\exists x(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q)$ es equivalente en Δ a una sin cuantificadores. Para simplificar la prueba podemos suponer que la variable x está en cada β_i. La justificación es la misma dada en VII.2.4.

Vamos a sustituir el relator binario $\leq$ por otro también binario, $<$. Pretendemos que el nuevo relator exprese orden estricto y por lo tanto introduciremos $<$ mediante,

$$\gamma \equiv \forall xy\ (x < y \leftrightarrow x \neq y \wedge x \leq y).$$

Con esta nueva notación podemos suponer que cada una de las β_i de φ está escrita sólo con $=$, $<$ y además, que son fórmulas simples sin negar. Veamos el porqué.

1.°) Si $\beta_i \equiv x \leq y$ sustituiremos β_i por $x = y \vee x < y$. La justificación es que

$$\gamma \vDash \forall xy\ (x \leq y \leftrightarrow x = y \vee x < y)$$

y por lo tanto,

$$\Delta \cup \{\gamma\} \models \varphi \leftrightarrow \exists x\, (\textstyle\bigwedge_{j\in\{1,\ldots,q\}-\{i\}} \beta_j \wedge (x = y \vee x < y))$$

2.º) Si $\beta_i \equiv \neg x \leqslant y$, sustituiremos β_i por $y < x$.
La justificación es que

$$\Delta \cup \{\gamma\} \models \forall xy(\neg x \leqslant y \leftrightarrow y < x)$$

y por lo tanto,

$$\Delta \cup \{\gamma\} \models \varphi \leftrightarrow \exists x\, (\textstyle\bigwedge_{j\in\{1,\ldots,q\}-\{i\}} \beta_j \wedge y < x)$$

Finalmente, para demostrar que cada φ de la forma $\exists x\, (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q)$, siendo las β_i de las formas mencionadas, es equivalente en $\Delta \cup \{\gamma\}$ a una sin cuantificadores, vamos a considerar tres casos posibles.

1.er) *Caso*

Algún β_i es una igualdad, por ejemplo, sea $\beta_i \equiv x = y$. En este caso basta con sistituir x por y. Es decir,

$$\Delta \cup \{\gamma\} \models \exists x\, (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q) \leftrightarrow \mathbf{S}_x^y\, (\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q)$$

2.º) *Caso*

No hay igualdades entre las β_i y, o bien $\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q \equiv x < u_1 \wedge \ldots \wedge x < u_q$, o bien, $\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q \equiv v_1 < x \wedge \ldots \wedge v_q < x$.

Puesto que Δ es orden denso sin extremos, en cualquiera de los dos casos todo modelo suyo lo será de $\exists x(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q)$. Por consiguiente,

$$\Delta \cup \{\gamma\} \models \exists x(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q) \leftrightarrow \textstyle\bigwedge_{k\in K} w_k = w_k$$

siendo $\{w_k/k \in K\} = \mathrm{LBR}(\varphi)$.

3.er) *Caso*

No hay igualdades entre las β_i y

$$\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q \equiv (x < u_1 \wedge \ldots \wedge x < u_S) \wedge (v_1 < x \wedge \ldots \wedge v_r < x)$$

Para que $\exists x(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q)$ sea verdad en un cierto modelo hace falta que todas las u_i estén a la derecha de las v_j. Por lo tanto,

$$\Delta \cup \{\gamma\} \models \exists x(\beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q) \leftrightarrow \textstyle\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant S,\, 1\leqslant j\leqslant r} v_j < u_i. \blacksquare$$

2.6. *Ejercicios*

1) Encontrad fórmulas sin cuantificadores, y con las mismas variables libres que las propuestas, equivalentes en TEO($\mathcal{N}_S$) a las siguientes:

a) $\exists x(f^7 x = c \wedge \neg f^6 x = fy)$.
b) $\exists x(f^7 x = f^9 c \wedge f^4 x = f y \wedge \neg f^6 x = fy)$.
c) $\exists x(f^5 x = f^6 x \wedge f^4 x = fy)$.
d) $\forall x\, \exists y(f^6 x = c \wedge f^5 y = f^{12} z \wedge \neg x = f^2 v)$.
e) $\exists x\, \forall y(f^6 y = f^5 v \wedge f^5 y = f^4 x \rightarrow f^{15} c = x)$

2) Encontrad una fórmula sin cuantificadores, y con las mismas variables libres, que sea equivalente en $\Delta \cup \{\gamma\}$ a la fórmula

$$\exists xy(x < y \wedge \exists\, z(x < z \wedge z < y \wedge \forall u(u \neq z \rightarrow u < y \vee u = x)))$$

3) Completad la prueba de 2.5. (Fijaros en que hemos demostrado que toda fórmula de $L \cup \{<\}$ es equivalente en $\Delta \cup \{\gamma\}$ a una sin cuantificar pero no que toda fórmula de L lo sea respecto de Δ).

4) Demostrad que $2\mathbb{N}$, el conjunto de los números pares, no es definible en $\mathcal{N}_S$. O mejor,

Problema 5

Demostrad que en $\mathcal{N}_S$ los únicos conjuntos definibles son los finitos y los cofinitos (siendo estos últimos los conjuntos que tienen complementario finito).

3. MODELO-COMPLETUD

En este apartado introducimos el concepto de modelo-completud que, como os había comentado, está relacionado con el de completud pero ni lo implica ni es implicado por él. Ejemplo de teorías completas que no son modelo-completas es, además del mencionado en la introducción de este apartado, el de las Algebras de Boole atómicas pero infinitas. Como ejemplo de modelo-completas, pero no completa, el muy manido de los cuerpos algebraicamente cerrados sin precisar característica.

Demostraremos que sin embargo ambos conceptos están relacionados pues las teorías modelo completas que poseen además un modelo principal —un modelo tal que él mismo o su copia isomorfa está contenido como subsistema en todo modelo de la teoría— son teorías completas.

Son modelo-completas también todas las teorías que admiten eliminación de cuantificadores. Y en especial, todas las mencionadas en el apartado precedente. Hay como dije en la introducción teorías modelo-completas que no admiten eliminación de

cuantificadores. En particular la de cuerpos-real-cerrados en el lenguaje sin $<$, para el orden.

3.1. Definición

Una teoría Σ es modelo-completa si siempre que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ sean modelo de Σ y $\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$, entonces $\mathscr{A} < \mathscr{B}$. □

3.2. Teorema. Test de la modelo-completud por admisión de eliminación de cuantificadores

Si Σ es una teoría que admite eliminación de cuantificadores, entonces Σ es modelo-completa.

Demostración

Sea Σ una teoría que admite eliminación de cuantificadores y sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ modelos de Σ y $\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$. Tenemos que demostrar que para cada φ de L tal que $\mathrm{LBR}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ se verifica $\mathscr{A}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ sat φ syss $\mathscr{B}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$ sat φ, para cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$.

Puesto que Σ admite eliminación de cuantificadores, hay una fórmula ψ, con las mismas variables libres que φ, tal que $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Por consiguiente, lo único que tendremos que demostrar es que

$$\mathscr{A}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] \text{ sat } \psi \text{ syss } \mathscr{B}[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] \text{ sat } \psi$$

para cada $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbf{A}$.

Pero, si buscáis bien, lo encontraréis en el capítulo II como ejercicio. ■

3.3. Corolario

Son modelo completas las teorías que en el apartado VII2 catalogamos como teorías que admiten eliminación de cuantificadores: 1) órdenes lineales densos con primer y último elemento, 2) órdenes discretos sin primer ni último elemento en el lenguaje L con $<$ y s, etc. ■

3.4. Teorema

Σ es modelo-completa syss siempre que $\mathscr{A}$ sea modelo de Σ, $\Sigma \cup \mathrm{DIAG}(\mathscr{A})$ es una teoría completa en $\mathrm{L}(\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle)$ ($\bar{\mathbf{a}}$ enumeración completa de $\mathbf{A}$).

Demostración

[$\Rightarrow$] En efecto, sea Σ modelo-completa y sea $\mathscr{A} \in \mathrm{MOD}(\Sigma)$. Para demostrar que $\Sigma \cup \mathrm{DIAG}(\mathscr{A})$ es una teoría completa demostraremos que sus modelos son elementalmente equivalentes a $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ y, por lo tanto, dos a dos.

Sea $\langle \mathscr{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ un modelo de $\Sigma \cup \mathrm{DIAG}(\mathscr{A})$.

Por ser modelo de $\mathrm{DIAG}(\mathscr{A})$, $\mathscr{A} \,\tilde{\sqsubseteq}\, \mathscr{B}$ (IV.6.6) y por consiguiente, hay un $\mathscr{C}$ tal que $\mathscr{A} \cong \mathscr{C} \sqsubseteq \mathscr{B}$. $\mathscr{C}$ es también modelo de Σ pues $\mathscr{A}$ lo es obviamente y son isomorfos (teorema de isomorfía).

Siendo Σ modelo completa, $\mathscr{A} \cong \mathscr{C} \prec \mathscr{B}$ y por lo tanto, $\mathscr{A} \,\tilde{\prec}\, \mathscr{B}$. Usando ahora IV.6.7 concluimos que $\langle \mathscr{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ es modelo de $\mathrm{TEO}(\mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}}\rangle)$. Puesto que tanto $\langle \mathscr{B}, \bar{\mathbf{b}} \rangle$ como $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$ son modelo de una teoría completa, $\mathrm{TEO}(\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle)$, necesariamente serán elementalmente equivalentes.

La conclusión es que necesariamente la teoría $\Sigma \cup \mathrm{DIAG}(\mathscr{A})$ es completa.

[$\Leftarrow$] Supongamos que siempre que $\mathscr{A} \in \mathrm{MOD}(\Sigma)$, $\Sigma \cup \mathrm{DIAG}(\mathscr{A})$ es completa.

Para demostrar que Σ es modelo-completa, sea $\mathscr{B} \in \mathrm{MOD}(\Sigma)$ tal que $\mathscr{A} \sqsubseteq \mathscr{B}$. Puesto que $\Sigma \cup \mathrm{DIAG}(\mathscr{A})$ es completa, sus modelos son elementalmente equivalentes; o sea, $\langle \mathscr{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \equiv \langle \mathscr{B}, \bar{\mathbf{a}} \rangle$. De aquí se sigue que $\mathscr{A} \prec \mathscr{B}$ (por IV.6.1).

Con esto hemos demostrado que Σ es modelo completa. ■

3.5. Corolario

Si Σ es una teoría que admite eliminación de cuantificadores, entonces para cada $\mathscr{A} \in \mathrm{MOD}(\Sigma)$ se cumple que $\Sigma \cup \mathrm{DIAG}(\mathscr{A})$ es una teoría completa.

Demostración

Obvia. ■

Definición

Sea Σ una teoría. Un modelo $\mathscr{A}$ de Σ es un modelo principal de Σ syss cada modelo de Σ tiene un subsistema isomorfo al propio $\mathscr{A}$. □

Ejemplos

1) El orden de los racionales, $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ es un modelo principal de la teoría de los órdenes densos sin extremos.

2) El cuerpo de los números racionales es el modelo principal de la teoría de los cuerpos con característica cero y el de los $\mathscr{Z}_p$ de los de característica p, p primo.

3) $\langle \mathbb{N}, 0, \mathbf{S}, +, \cdot \rangle = \mathcal{N}$; es decir, el modelo estándar de la aritmética, es el modelo principal de TEO($\mathcal{N}$).

4) $\langle \mathbb{N}, 0, \mathbf{S} \rangle$; es decir, el sistema formado por los naturales estándar junto con el cero y la función del siguiente, es el modelo principal de TEO($\mathcal{N}_S$).

3.6. Teorema. Test del modelo principal (Robinson, 1956)

Si T una teoría modelo-completa con un modelo principal, entonces T es completa.

Demostración

Sea T una teoría modelo-completa y sea $\mathcal{A}^*$ su modelo principal.
Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ dos modelos de T. Por ser $\mathcal{A}^*$ el modelo principal, hay dos sistemas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ tales que $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}' \sqsubseteq \mathcal{A}'$ y $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}^* \cong \mathcal{B}'$ todos ellos modelos de T.
Puesto que T es modelo-completa, $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}' \prec \mathcal{A}'$. De aquí se sigue que $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ y $\mathcal{B}' \equiv \mathcal{A}'$ (Ejercicio 1) de IV.3.6). Puesto que $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}'$ y sabemos que isomorfía implica equivalencia elemental, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}'$.
Por consiguiente, T es una teoría completa. ■

3.7. Corolario 1

La teoría de los órdenes densos sin extremos es completa. ■

3.8. Corolario 2

La teoría de los naturales con la operación del siguiente es completa. ■

3.9. Teorema

Si T es una teoría tal que para cada dos modelos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de T tales que $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ hay un sistema $\mathcal{C}$ que los contiene a ambos como subsistema elemental ($\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ y $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$), entonces T es modelo-completa.

Demostración

Es básicamente el problema 4 de IV. ■

3.10. *Ejercicios*

1) Demostrad que si $T \subseteq SEN(L)$ es modelo-completa y $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in MOD(T)$ son tales que $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$, entonces: para cada $\varphi \in FOR(L)$ y cada $\mathcal{I}: \mathcal{V} \to \mathbf{A}$ se cumple que si $\mathcal{B}\mathcal{I}$ sat $\exists x\varphi$ entonces hay un $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ tal que $\mathcal{B}\mathcal{I}^{x}_{\mathbf{x}}$ sat φ.

2) Demostrad que si T es modelo-completa y $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in MOD(T)$ y $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ entonces para cada subconjunto finito $\mathbf{A}'$ de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}$ y cada elemento $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$ hay un automorfismo $\mathbf{h}$ de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}$ tal que $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{A}'$ y $\mathbf{h}(\mathbf{b}) \in \mathbf{A}$.

Problema 6

Demostrad que si T es modelo-completa, para cada $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in MOD(T)$ tales que $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ entonces:

1) Para cada sucesión finita de elementos de $\mathbf{A}$, $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_k \rangle_{k \in \{1, \ldots, n\}}$

$$\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \text{ en un lenguaje } L \cup \{c_k\}_{k \in \{1, \ldots, n\}}.$$

2) Para cada sucesión de elementos de $\mathbf{A}$, $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_k \rangle_{k<\beta}$ con β arbitrario:

$$\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle < \langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \text{ en el lenguaje extendido } L \cup \{c_k\}_{k<\beta}.$$

3) Para cada sucesión de elementos de $\mathbf{A}$, $\bar{\mathbf{a}} = \langle \mathbf{a}_k \rangle_{k<\beta}$ con β arbitrario:

$$\langle \mathcal{A}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, \bar{\mathbf{a}} \rangle \text{ en el lenguaje extendido } L \cup \{c_k\}_{k<\beta}.$$

4. EL SISTEMA $\mathcal{N}_S = \langle \mathbb{N}, 0, S \rangle$: COMPLETUD Y PROCEDIMIENTO DE DECISION DE SU TEORIA

En este apartado vamos a estudiar el sistema $\mathcal{N}_S$ y llegaremos a la conclusión de que TEO($\mathcal{N}_S$) es axiomatizable aunque no finitamente axiomatizable, completa y decidible. Cuando en II.3.4 introdujimos el lenguaje de la aritmética, formulamos una serie de axiomas, en particular: α_1 —que dice que el cero no es el siguiente de ningún numero—, α_2 —que dice que la función del siguiente es inyectiva—, α_3 —que dice que todo número distinto de cero es el siguiente de otro— y la serie infinita de los α_{4n} —que afirman que no hay ciclos de tamaño n—. Llamemos $\mathbf{A}_S$ al conjunto formado por dichos axiomas y demostremos que este conjunto axiomatiza la teoría de $\mathcal{N}_S$ probando que TEO($\mathcal{N}_S$) = CON($\mathbf{A}_S$). Es fácil comprobar que cada una de las sentencias de $\mathbf{A}_S$ es verdadera en $\mathcal{N}_S$ y que, por lo tanto, CON($\mathbf{A}_S$) $\subseteq$ TEO($\mathcal{N}_S$).

Demostrar que TEO($\mathcal{N}_S$) $\subseteq$ CON($\mathbf{A}_S$) es algo menos fácil; demostraremos que CON($\mathbf{A}_S$) es una teoría completa. Una vez demostrado que CON($\mathbf{A}_S$) es completa, es inmediato comprobar que TEO($\mathcal{N}_S$) $\subseteq$ CON($\mathbf{A}_S$) pues si hubiera una sentencia φ de

TEO($\mathcal{N}_S$) que no estuviera en CON($\mathbf{A}_S$), por ser ésta completa, $\neg\varphi \in$ CON($\mathbf{A}_S$). Pero, puesto que CON($\mathbf{A}_S$) $\subseteq$ TEO($\mathcal{N}_S$), $\neg\varphi \in$ TEO($\mathcal{N}_S$). Esto último es imposible, un mismo sistema no puede ser simultáneamente modelo de una sentencia y de su negación.

4.1. Lema

El conjunto de las sentencias que son consecuencia de $\mathbf{A}_S$ es un subconjunto del de las verdaderas en $\mathcal{N}_S$; es decir, CON($\mathbf{A}_S$) $\subseteq$ TEO($\mathcal{N}_S$).

Demostración

Para probar el lema bastaría con darse cuenta de que $\mathcal{N}_S$ es un modelo de $\mathbf{A}_S$ pues siendo así, si $\mathbf{A}_S \models \varphi$, entonces $\mathcal{N}_S$ es modelo de φ. ■

4.2. Modelos de $\mathbf{A}_S$

¿Cómo tiene que ser un sistema $\mathcal{A}$ para ser modelo de $\mathbf{A}_S$?
$\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, 0', \mathbf{S}' \rangle$, para ser modelo de $\mathbf{A}_S$ ha de ser tal que:

1.°) $\mathbf{S}'$ tiene que ser una función biyectiva de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A} - \{0'\}$. Esto se sigue de los axiomas α_1, α_2 y α_3.

2.°) Sabemos que no hay ciclos de tamaño n, para cada n. En $\mathbf{A}$ deben aparecer los puntos $0' \rightarrow \mathbf{S}'(0') \rightarrow \mathbf{S}'(\mathbf{S}'(0')) \rightarrow \ldots$ que serán todos distintos.

3.°) En el universo $\mathbf{A}$ de $\mathcal{A}$ puede haber otros puntos; por ejemplo, $\mathbf{a}$. Caso de haberlos, tienen que tener sus siguientes, pues $\mathbf{S}': \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$. Además, puesto que por α_3 sabemos que todo número distinto del cero, tiene un predecesor y por α_2 sabemos que es único, cada punto tiene también su predecesor. Estos puntos tienen que ser todos distintos, pues de lo contrario habría ciclos finitos. En una situación así se entiende por qué decimos que $\mathbf{a}$ pertenece a una $\mathfrak{Z}$-cadena:

$$\ldots^{*} \rightarrow {}^{*} \rightarrow \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{S}'(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{S}'(\mathbf{S}'(\mathbf{a})) \rightarrow \ldots$$

El nombre de $\mathfrak{Z}$-cadenas les viene de su semejanza con los enteros, $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

4.°) En $\mathbf{A}$ pueden aparecer muchas $\mathfrak{Z}$-cadenas, dos cualesquiera han de ser disjuntas, pues α_2 impide que se mezclen. Además, las $\mathfrak{Z}$-cadenas tienen que ser disjuntas con la parte estándar.

Todo lo anterior puede precisarse de la forma siguiente:

4.2.1. *Relación de equivalencia en un modelo de A_S*

Sea $\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, 0', \mathbf{S}' \rangle$ un modelo cualquiera de $\mathbf{A}_S$ y definamos en $\mathbf{A}$ la siguiente relación de equivalencia para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{A}$: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ syss $\mathbf{S}'^n\mathbf{x} = \mathbf{S}'^m\mathbf{y}$, para ciertos números naturales n y m.

$\mathbf{S}'^n\mathbf{x}$ se define recursivamente como sigue:

$$\mathbf{S}'^0\mathbf{x} = \mathbf{x} \text{ y } \mathbf{S}'^{m+1}\mathbf{x} = \mathbf{S}'(\mathbf{S}'^n\mathbf{x})$$

Es decir, dos puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están relacionados si la función $\mathbf{S}'$ puede ser aplicada un número finito de veces a un punto para obtener el otro. Es evidente que la relación $\sim$ es de equivalencia, pues reflexiva y simétrica lo es por definición y para demostrar que es transitiva basta con utilizar las características de $\mathbf{S}'$. (Hacedlo vosotros, es el ejercicio 1) de 4.9).

La parte estándar de $\mathbf{A}$ es la clase de equivalencia de cero, que coincide, evidentemente, con la clase de equivalencia de cualquiera de los sucesores del cero:

$$0' \rightarrow \mathbf{S}'(0') \rightarrow \mathbf{S}'(\mathbf{S}'(0)) \rightarrow$$

La clase de equivalencia de cualquier otro punto $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ es el conjunto generado a partir de $\{\mathbf{a}\}$ mediante $\mathbf{S}'$ y su inversa:

$$\ldots^{*} \rightarrow {}^{*} \rightarrow \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{S}'(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{S}'(\mathbf{S}'(\mathbf{a})) \rightarrow \ldots$$

Estas clases son las $\mathfrak{Z}$-cadenas (véase el problema 7).

4.2.2. *Proposición*

Todo sistema $\mathscr{D} = \langle \mathbf{D}, 0'', \mathbf{S}'' \rangle$ que tenga una parte estandar

$$0'' \rightarrow \mathbf{S}''(0'') \rightarrow \mathbf{S}''(\mathbf{S}''(0'')) \rightarrow \ldots$$

y una parte no estándar formada por cualquier número de $\mathfrak{Z}$-cadenas disjuntas, es un modelo de $\mathbf{A}_S$. (Hacedlo, está en el ejercicio 2).

Con esto hemos caracterizado completamente los modelos de A_S.

Si $\mathscr{A}$ es un modelo de A_S que tiene sólo un número $k \leq \aleph_0$ de $\mathfrak{Z}$-cadenas, entonces $\mathbf{A}$ es infinito numerable. En general, si el conjunto de las $\mathfrak{Z}$-cadenas tiene cardinalidad λ, entonces el número de los puntos de $\mathbf{A}$ es $\aleph_0 + \aleph_0 \cdot \lambda$; es decir, el mayor de $\{\aleph_0, \lambda\}$. O sea, que

$$\text{card}(\mathscr{A}) = \begin{cases} \aleph_0, \text{ si } \mathscr{A} \text{ tiene } \lambda \leq \aleph_0\ \mathfrak{Z}\text{-cadenas.} \\ \lambda, \text{ si } \mathscr{A} \text{ tiene } \lambda > \aleph_0\ \mathfrak{Z}\text{-cadenas.} \end{cases}$$

4.3. Lema

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son modelos de $\mathbf{A}_S$ con el mismo número de $\mathfrak{Z}$-cadenas, $\mathcal{A} \cong \mathcal{D}$.

Demostración

En primer lugar, hay un único isomorfismo entre la parte estándar de $\mathcal{A}$ y la de $\mathcal{D}$: a saber, el que se define así:

$$\mathbf{h}(0') = 0'' \quad \mathbf{h}(S'^n 0') = S''^n (0'').$$

Por hipótesis hay una biyección entre las $\mathfrak{Z}$-cadenas de $\mathcal{A}$ y las de $\mathcal{D}$: cada $\mathfrak{Z}$-cadena de $\mathcal{A}$ tiene asociada una de $\mathcal{D}$.

Por último, dos $\mathfrak{Z}$-cadenas cualesquiera son isomorfas.

Combinad todo, esto, usad si es preciso el axioma de elección, y obtened el isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{D}$. (Hacedlo, es el Problema 8) ■

4.4. Teorema

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son modelos supernumerables de $\mathbf{A}_S$ de la misma cardinalidad, entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{D}$.

Demostración

Por hipótesis card($\mathcal{A}$) = card($\mathcal{D}$). Sabemos además que la cardinalidad de estos sistemas coincide con el número de sus $\mathfrak{Z}$-cadenas. Por el lema VII.4.3, $\mathcal{A} \cong \mathcal{D}$. ■

4.5. Teorema

CON($\mathbf{A}_S$) es una teoría completa

Demostración

CON($\mathbf{A}_S$) es, obviamente, una teoría.

CON($\mathbf{A}_S$) no tiene modelos finitos.

CON($\mathbf{A}_S$) es categórica para cada λ supernumerable (VII.4.4).

Por consiguiente, usando el test de Vaught (VII.1.6) concluimos que es una teoría completa. ■

4.6. Teorema

TEO($\mathcal{N}_S$) = CON($\mathbf{A}_S$).

Demostración

Se sigue del lema 4.1 y del teorema 4.5 precedentes. (Hacedlo, es el ejercicio 5 de 4.9). ■

4.7. Teorema

TEO($\mathcal{N}_S$) es axiomatizable.

Demostración

Se sigue de V.1.3.1 y del teorema anterior, 4.6. ■

4.8. Eliminación de cuantificadores en TEO($\mathcal{N}_S$)

Hemos demostrado ya que TEO($\mathcal{N}_S$) admite eliminación de cuantificadores (VII.2.4); es decir, que cada fórmula es equivalente en $\mathcal{N}_S$ a una sin cuantificar y con las mismas variables libres.

El método de eliminación de cuantificadores cumple los requisitos que exigimos a los procedimientos efectivos: las instrucciones de ejecución del método son precisas y finitas, el método no utiliza el azar y veremos que además puede responder sí o no a la pregunta ¿es φ una consecuencia de TEO($\mathcal{N}_S$)?, para cada sentencia φ.

Por último el método de eliminación de cuantificadores podría haber servido para demostrar que CON($\mathbf{A}_S$) es una teoría completa sin usar el test de Vaught ni la noción de $\mathfrak{T}$-cadena.

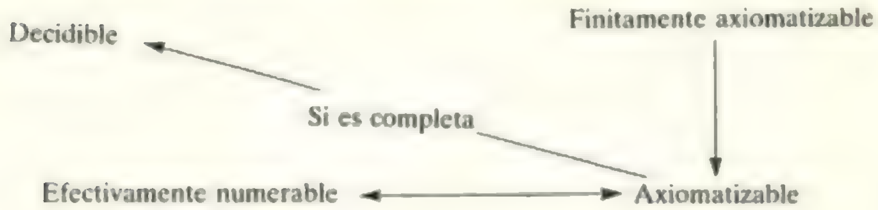
4.8.1. *Proposición:* TEO($\mathcal{N}_S$) es decidible

En efecto, cada sentencia φ de TEO($\mathcal{N}_S$) es equivalente en $\mathcal{N}_S$ a una sin cuantificadores. Por consiguiente nos basta con demostrarlo para sentencias sin cuantificadores y en realidad, lo importante sería para sentencias atómicas. Evidentemente, toda sentencia atómica es de la forma $f^m c = f^r c$ y éstas serán verdaderas en $\mathcal{N}_S$ cuando, y sólo entonces, $m = r$. ■

NOTA

En el ejemplo 3 de V.1.3 presentamos el esquema:

Relación entre propiedades de una teoría



Utilizándolo podríamos también haber concluido que TEO($\mathcal{N}_S$) es decidible, pero ¿podemos utilizarlo? Nosotros no lo hemos justificado porque nos falta saber teoría de la recursión y en este caso no podemos ni tan siquiera precisar los conceptos de decidibilidad y efectiva enumerabilidad, son nociones intuitivas.

4.8.2. *Proposición:* Subconjuntos definibles de $\mathcal{N}_s$

Haced el Problema 5 de este capítulo y comprobareis que utilizando eliminación de cuantificadores se puede demostrar que los únicos subconjuntos definibles de $\mathbb{N}$ son los finitos y los cofinitos. Como corolario se sigue que la relación de orden no es definible en $\mathcal{N}_S$. (Hacedlo vosotros, es el ejercicio 4 de 4.9). ■

4.8.3. *Proposición.* Completud de CON($\mathbf{A}_S$)

Como dije, el método de eliminación de cuantificadores nos podría haber servido de procedimiento alternativo para demostrar que CON($\mathbf{A}_S$) es completa, sin usar ni el test de Vaught, ni la noción de $\mathfrak{T}$-cadena.

Habría que demostrar primero que CON($\mathbf{A}_S$) admite eliminación de cuantificadores; el procedimiento es el empleado para demostrar que TEO($\mathcal{N}_S$) lo admitía (ver VII.2.4).

Ahora, utilizando un razonamiento similar al utilizado en la proposición 4.8.1 anterior, llegamos a la conclusión de que CON($\mathbf{A}_S$) es una teoría completa. ■

4.9. *Ejercicios*

1) Demostrad que la relación introducida en 4.2.1 es de equivalencia.

2) Demostrad la proposición 4.2.2.

3) Demostrad la proposición 4.8.3.

4) ¿Es la relación de orden definible en $\mathcal{N}_S$?

5) Demostrad 4.6.

6) ¿Se puede demostrar que CON($\mathbf{A}_S$) es completa utilizando el test del modelo principal?

Problema 7

Sea $\mathscr{A} = \langle \mathbf{A}, 0', \mathbf{S}' \rangle$ un modelo de $\mathbf{A}_S$ y sea $\mathbf{B} = [\mathbf{a}]^{\sim}$ la clase de equivalencia de un punto $\mathbf{a}$ no estándar; es decir, $\mathbf{a} \neq \mathbf{S}'^{n}0'$.

Demostrad que $\langle \mathbf{B}, \mathbf{S}' \mid \mathbf{B} \rangle \cong \langle \mathbb{Z}, \mathbf{S} \rangle$, siendo $\mathbf{S}' \mid \mathbf{B}$ la restricción de $\mathbf{S}'$ a $\mathbf{B}$, $\mathbb{Z}$ la clase de los enteros y $\mathbf{S}$ la función sucesor en $\mathbb{Z}$.

Para ello:

1.º) Demostrad que $\langle \mathbf{B}, \mathbf{S}' \mid \mathbf{B} \rangle$ es un sistema.

2.º) Utilizando recursión aritmética definid las funciones $\mathbf{j}$ y $\mathbf{h}$ y demostrad los lemas 1 y 2 que enuncio a continuación.

Definición de $\mathbf{j}$

Sea $\mathbf{b}_0 \in \mathbf{B}$. Por el teorema de recursión aritmética, que aceptamos en la metateoría, hay una única función $\mathbf{j}\colon \mathbb{N} \to \mathbf{B}$ tal que:

i) $\mathbf{j}(0) = \mathbf{b}_0$ y ii) $\mathbf{j}(\mathbf{Sx}) = \mathbf{S}'(\mathbf{j}(\mathbf{x}))$, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{N}$.

Definición de $\mathbf{h}$

Hay también una función $\mathbf{h}\colon \mathbb{N} \to \mathbf{B}$ tal que:

i) $\mathbf{h}(0) = \mathbf{b}_0$ y ii) $\mathbf{h}(\mathbf{Sx}) = \mathbf{P}'(\mathbf{j}(\mathbf{x}))$, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{N}$ —siendo $\mathbf{P}'\colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ tal que para cada $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$, $\mathbf{P}'(\mathbf{b})$ es el predecesor de $\mathbf{b}$; es decir, el único $\mathbf{d} \in \mathbf{B}$ tal que $\mathbf{S}'(\mathbf{d}) = \mathbf{b}$—. ■

Lema 1

Las funciones $\mathbf{j}$ y $\mathbf{h}$ son inyectivas (por inducción, utilidad α_{4n}).

Lema 2

Rec(j) ∩ REC(h) = {$\mathbf{b}_0$}.
Por último,

3.º) Definid, utilizando **j** y **h** una biyección **i**: $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{B}$ que sea isomorfismo entre los sistemas ⟨**B**, **S**′ | **B**⟩ y ⟨**Z**, **S**⟩.

Problema 8

Demostrad el lema 4.3.

Problema 9

Demostrad que TEO($\mathcal{N}_S$) no es finitamente axiomatizable. Para ello tendríais que demostrar que ningún subconjunto finito de $\mathbf{A}_S$ basta, y aplicar el lema V.3.3.

Problema 10

En el teorema 4.4 ¿es preciso que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ sean supernumerables? ¿Hay modelos numerables no isomorfos a $\mathcal{N}_S$?

Apéndice
ORDINALES Y CARDINALES

A los lectores de este libro se les supone unos conocimientos mínimos de Teoría intuitiva de conjuntos que incluye: Algebra de conjuntos, relaciones y funciones y las nociones de finito e infinito. Sin embargo, utilizamos también los conceptos de: Ordinal, Cardinal y ciertos principios y resultados relacionados con ellos tales como el de inducción para ordinales y un poco de Aritmética cardinal. Por este motivo me ha parecido conveniente añadir, a modo de chuleta, unas cuantas definiciones.

1. ORDINALES

Un conjunto transitivo es un conjunto $\mathcal{T}$ tal que para todo t_1, t_2 se cumple que si $t_1 \in t_2$ y $t_2 \in \mathcal{T}$, entonces $t_1 \in \mathcal{T}$. O, dicho de otra forma, tal que si $t_2 \in \mathcal{T}$ entonces $t_2 \subseteq \mathcal{T}$, para cada t_2.

Un ordinal es sencillamente un conjunto transitivo en el que $\in$ es un buen orden estricto.

De acuerdo con esta definición, el conjunto vacío, $\emptyset$, es un ordinal (al que denotaremos mediante 0). Asimismo, si α es un ordinal tendremos que $\alpha \cup \{\alpha\}$ también lo es. A este último lo llamaremos siguiente (o sucesor) de α y lo denotaremos indistintamente mediante $S\alpha$ o $\alpha + 1$.

Por ejemplo,

$S0 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = 1$
$S1 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\} = 2$
$S2 = 2 \cup \{2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\} = 3$
$\vdots$
$Sn = n \cup \{n\} = \{0,1, ..., n-1\} \cup \{n\} = \{0,1, ..., n\} = n + 1$

Además de los ordinales «cero» y «sucesor de un ordinal», la clase de los ordinales incluye a los denominados ordinales límite, definidos precisamente por no ser ni 0 ni el siguiente de ningún otro ordinal. Si λ es un ordinal límite se verifica lo siguiente:

$$\lambda = \bigcup \lambda = \{\alpha \,/\, \exists\beta(\beta \in \lambda \wedge \alpha \in \beta)\}$$

El menor de los ordinales límite, que denotaremos mediante ω, es el conjunto $\{0,1, \ldots\}$.

Dado que entre ordinales la relación de $\in$ es un buen orden estricto, con frecuencia sustituiremos este signo por $<$; es decir, para ordinales α y β escribimos indistintamente $\alpha < \beta$ o bien $\alpha \in \beta$.

Una propiedad especialmente agradable de los ordinales es que todo buen orden, $\langle \mathbf{A}, \leqslant \rangle$ —donde $\mathbf{A}$ es un conjunto cualquiera— es orden-isomorfo a un ordinal y sólo a uno. Es decir, existe un ordinal α y una función biyectiva $f: \mathbf{A} \to \alpha$ tal que: si $x_1 \leqslant x_2$ entonces $f(x_1) \in f(x_2)$ o $f(x_1) = f(x_2)$, para cada $x_1, x_2 \in \mathbf{A}$. Esta propiedad constituye, en la teoría cantoriana de los ordinales, la definición de los mismos. Aquí no la tomamos como definición, pero nos aseguramos de que los ordinales construidos por nosotros la verifican. Una consecuencia de ella es que todo buen orden $\langle \mathbf{A}, \leqslant \rangle$ se puede escribir de esta forma: $\langle x_\beta \rangle_{\beta<\alpha}$, donde α es el único ordinal que es isomorfo a $\langle \mathbf{A}, \leqslant \rangle$ y x_β es la antiimagen de β en el isomorfismo. Puesto que el Axioma de elección equivale al Teorema del buen orden —que dice que todo conjunto puede ser bien ordenado—, todo conjunto $\mathbf{A}$ puede representarse de la manera antes dicha

1.1. Inducción transfinita

El conocido principio de inducción para números naturales se extiende para los ordinales del siguiente modo:

Sea $P(\alpha)$ una propiedad de ordinales tal que para cada ordinal β: si $P(\gamma)$ para cada $\gamma < \beta$, entonces $P(\beta)$. Entonces $P(\alpha)$ para cada ordinal α. Es decir, si para cualquier ordinal el hecho de que todos los ordinales menores que él tengan una determinada propiedad implica que él también la tenga, entonces todos los ordinales tienen la propiedad.

De todas maneras, el principio de inducción para ordinales generalmente se enuncia separando en tres partes las hipótesis de inducción; teniendo en cuenta los tres tipos diferentes de ordinales que existen: el 0, el siguiente de un ordinal, o un ordinal límite.

Suele presentarse de la manera siguiente:

Sea $P(\alpha)$ una propiedad de ordinales tal que:

i) $P(0)$.

ii) Si $P(\beta)$ entonces $P(S\beta)$.

iii) Si β es un ordinal límite y para todo $\gamma < \beta$ tenemos que $P(\gamma)$, entonces $P(\beta)$ —es decir, $P(\bigcup\beta)$—.

Entonces, $P(\alpha)$ para cada ordinal α.

2. CARDINALES

Intuitivamente el cardinal de un conjunto **A**, card(**A**), es la cantidad de elementos de dicho conjunto. Sin embargo, la definición precisa del concepto de cardinal tuvo una larga gestación:

Cantor en 1885 escribe: «Llamamos potencia o número cardinal de **M** al concepto general que se obtiene a partir del conjunto **M** por medio de nuestro pensar activo, haciendo abstracción tanto de la naturaleza de sus elementos como del orden en que están dados».

En la misma línea de pensamiento, pero concretando un poco más, Frege y Russell los concibieron como clases de equivalencia de conjuntos equipotentes; es decir, biyectables. Sucede que estas clases pueden no ser conjuntos y haría falta postular un nuevo axioma para la teoría.

2.1. Comparación de cantidad

Sin embargo, en una presentación intuitiva de la Teoría de Conjuntos se prescinde de la definición del concepto de cardinal y se enfoca hacia cuestiones comparativas, así:

Sean **A** y **B** conjuntos. Definimos card(**A**) $\leqslant$ card(**B**) syss existe una función inyectiva $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

Hay que interpretar esta relación como un concepto comparativo de cantidad, diciendo: **B** tiene al menos tantos elementos como **A**.

También definimos: card(**A**) = card(**B**) si y sólo si card(**A**) $\leqslant$ card(**B**) y card(**B**) $\leqslant$ card(**A**). O, lo que equivale a lo anterior, si existe una biyección entre **A** y **B**.

Uno de los muchos teoremas equivalentes al axioma de elección dice que para dos conjuntos **A** y **B** ocurre que:

$$\text{card}(\mathbf{A}) \leqslant \text{card}(\mathbf{B}) \text{ o } \text{card}(\mathbf{B}) \leqslant \text{card}(\mathbf{A}).$$

2.2. Aritmética cardinal

La suma, producto y exponenciación de cardinales se definen basándose en la unión, producto cartesiano y conjunto de funciones de un conjunto en otro. Concretamente, si $\alpha = \text{card}(\mathbf{A})$ y $\beta = \text{card}(\mathbf{B})$.

— El cardinal suma, $\alpha + \beta$ se define como el cardinal de $\dot{\mathbf{A}} \cup \dot{\mathbf{B}}$, siendo $\dot{\mathbf{A}}$ y $\dot{\mathbf{B}}$ conjuntos con el mismo cardinal que **A** y **B** pero disjuntos. Es decir, $\alpha + \beta = \text{card}(\dot{\mathbf{A}} \cup \dot{\mathbf{B}})$ —donde $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \times \{0\}$ y $\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \times \{\{0\}\}$—.

— El cardinal producto $\alpha \cdot \beta$ es simplemente el del producto cartesiano de **A** y **B**. Es decir, $\alpha \cdot \beta = \text{card}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

— El cardinal exponenciación α^β es el del conjunto $\mathbf{A^B} = \{f \,/\, f\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}\}$. Es decir, $\alpha^\beta = \text{card}(\mathbf{A^B})$.

2.3. Definición de los cardinales

Se puede identificar a los cardinales con los ordinales iniciales; es decir, aquellos para los que no puede establecerse una función inyectiva que tome valores en ordinales anteriores (o, lo que es lo mismo, en elementos suyos). De esta forma se definiría el cardinal de un conjunto como el menor de los ordinales biyectables con él, definición amparada en el axioma de elección.

¿Cómo se realiza la identificación entre cardinales y ordinales iniciales? Así:

Dado un conjunto **A** cualquiera, el axioma de elección nos garantiza que puede ser bien ordenado: Por otra parte, dada la agradable propiedad de los ordinales, mencionada al principio, de proporcionar etiquetas identificadoras personalizadas para todos los buenos órdenes, existirá un único ordinal orden-isomorfo al buen orden de **A**. En particular, existirá un ordinal biyectable con **A**. Lo que hacemos es identificar al cardinal de **A**, card(**a**), con el menor ordinal α con el que puede ser biyectado. α es un ordinal inicial cuando para todo $\beta < \alpha$, β no es biyectable con α.

2.4. Cardinales finitos e infinitos

Decimos que un cardinal es finito si es el cardinal de un conjunto finito y por lo tanto identificable a un ordinal finito.

Un cardinal es infinito cuando no es finito.

A los cardinales infinitos los denominamos alephs.

$\aleph_0$ es el primer cardinal infinito; es, como sabeis, el cardinal del conjunto de los números naturales. O sea, $\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N})$. Puesto que hemos identificado a los cardinales con ordinales iniciales, $\aleph_0 = \omega = \text{card}(\mathbb{N})$.

Sucede que para cada ordinal α, $\aleph_\alpha$ es el cardinal infinito asociado a él de manera que el orden de los ordinales se transfiere a los cardinales infinitos. Es decir, si $\alpha < \beta$, entonces $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$. La razón profunda de esta posibilidad radica en la existencia de un orden-isomorfismo entre ordinales y cardinales infinitos.

2.5. Propiedades aritméticas de los cardinales

A continuación enuncio algunas de estas propiedades, pero no las demuestro. Sean k, λ y μ cardinales cualesquiera:

1) $k + \lambda \leq k \times \lambda$, para todo λ, $k \geq 2$.

2) $\aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha$, para cada ordinal α y cada $n \in \omega$.

3) $\aleph_\alpha \times n = \aleph_\alpha$, para cada ordinal α y cada $n \in \omega$.

4) Para todo ordinal α

$$\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$$

5) Para todo ordinal α y β

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha + \aleph_\beta = \text{máx}(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$$

6) $(k \times \lambda)^\mu = k^\mu \times x^\mu$.

7) $(k^\lambda \times k^\mu) = k^{\lambda+\mu}$.

8) $(k^\lambda)^\mu = k^{\lambda\times\mu}$.

9) Si $k \leqslant \lambda$ entonces $k^\mu \leqslant \lambda^\mu$.

10) Si $0 < \lambda \leqslant \mu$, entonces $k^\lambda \leqslant k^\mu$.

BIBLIOGRAFIA

Addison, J. W., Henkin, L. y Tarski, A., eds. (1965). *The theory of models: Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley.* Amsterdam: North Holland.

Bar-Hillel, Y. et al., eds. (1961). *Essays on the foundations of mathematics.* Jerusalem: Magner Press, The Hebrew University.

Barwise, J. (1975). *Admissible sets and structures: an approach to definability theory.* Berlin: Springer-Verlag.

— (1977). «An introduction to first-order logic», en Barwise, J., ed. [1977], pp. 5-46.

Barwise, J., ed. (1977) *Handbook of mathematical logic.* Amsterdam: North Holland.

Barwise, J. y Feferman, S., eds. (1985).*Model theoretic logics.* Berlin: Springer-Verlag.

Bell, J. L. y Machover, M. (1977). *A course in mathematical logic.* Amsterdam: North Holland.

Bell, J. L. y Slomson, A. B. (1969). *Models and ultraproducts: an introduction.* Amsterdam: North Holland.

Bernstein, A. R. (1973). «Non-standard analysis», en Morley, ed. [1973].

Beth, E. W. (1965). *The foundations of mathematics.* Amsterdam: North Holland.

Birkhoff, G. y Maclane, S. (1941). *A survey of modern algebra.* New York: Macmillan. Trad. *Algebra moderna.* Barcelona: Vicens Vives, 1954.

Boolos, G. S. y Jeffrey, R. C. (1974) *Computability and logic.* Cambridge: Cambridge University Press.

Bourbaki, N. (1969). *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid: Alianza Universidad.

Bridge, J. (1977). *Beginning model theory.* Oxford: Clarendon Press.

Burris, S. y Sankappanavar, H. P. (1981). *A course in universal algebra.* Berlin: Springer-Verlag.

Castrillo, P. y Vega, L., eds. (1984). *Lecturas de lógica II.* Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Chang, C. C. (1974). «Model theory 1945-1971», en Henkin, et al., [1974], pp. 173-186.

Chang, C. C. y Keisler, H. J. (1977). *Model theory.* Amsterdam: North Holland.

Church, A. (1956). *Introduction to mathematical logic.* Princeton: Princeton University Press.

Church, A. y Quine, W. V. (1952). «Some theorems on definability and decidability», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 17, pp. 179-187.

Dalen, D. (1983). *Logic and structure*. Berlin: Springer-Verlag.
Deaño, A. (1974). *Introducción a la lógica formal*. Madrid: Alianza Universidad.
Doner, J. y Hodges, W. (1988): «Alfred Tarski and decidable theories», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 53, pp. 20-35.
Ebbinghaus, H. D., Flum, J., y Thomas, W (1984). *Mathematical logic*. Berlin: Springer-Verlag.
Enderton, H. B. (1972). *A mathematical introduction to logic*. New York: Academic Press.
— (1977). *Elements of set theory*. New York: Academic Press.
Etchemendy, J (1988). «Tarski on truth and logical consequence», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 53, pp. 51-79.
Feferman, S. (1983). «Kurt Gödel: Conviction and caution», en *Proceedings of the 7th International Congress in Logic, Methodology, and Philosophy of Science*. Salzburg: The Congress.
— (1968). «Lectures on proof theory», en *Proceedings of the Summer School in Logic, Leeds, 1967: Lecture notes in mathematics 70*. Berlin: Springer-Verlag.
Frege, G. (1879). «Begriffsschrift», traducción inglesa en Heijenoort [1967], pp. 1-82.
— (1884) *Die Grundlagen der Arithmetik: Fundamentos de la Aritmetica*. Barcelona. Laia [1972].
Gabbay, D. y Gwenthner, F. (1984-85). *Handbook of philosophical logic*. Vol. I, II. Dordrecht: Reidel Publishing.
Garrido, M. (1974). *Lógica simbólica*. Madrid: Editorial Tecnos.
Gödel, K (1930). «The completeness of the axioms of the functional calculus of logic», en Heijenoort [1967], pp. 582, 591.
Goldfarb, W. D. (1979). «Logic in the Twenties: the nature of the quantifier». *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 44, pp. 351-368.
Halmos, P R (1960). *Naive set theory*. Berlin: Springer-Verlag. Trad. *Teoría intuitiva de los conjuntos*. México: CECSA, 1965.
Hatcher, W. S. *The logical foundations of mathematics*. Oxford: Pergamon Press.
Heijenoort, J., ed. (1981). *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
Henkin, L. (1967). «Completeness», en Morgenbesser, S. [1967].
— (1949). «The completeness of the first order functional calculus», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 14, pp. 159-166. Trad. en Castrillo, P. y Vega, L., eds. (1984).
— (1950). «Completeness in the theory of types», *The Journal of Symbolic Logic*, vol 15, pp. 81-91.
— (1975). «Identity as a logical primitive», *Philosopical Quarterly of Israel*, vol. 5, núms. 1-2, pp. 31-45.
— (1960). «On mathematical induction», *The American Mathematical Monthly*, vol. 67.
— (1953) «Some interconnections between modern algebra and mathematical logic», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 74, pp. 410-427.
— (1967). «Truth and provability», en Morgenbesser, S. [1967].
— (1956). «Two concepts from the theory of models», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 21, pp. 28-32.
— (1956). *La structure algébrique des theories mathematiques*. Paris: Gauthier-Villars.
Henkin, L. et al., eds. (1974). *Proceedings of the Tarski Symposium, Berkeley, 1971*. (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XXV). Providence, R I.: American Mathematical Society.
Hermes, H. (1969). *Introduction to mathematical logic*. Berlin: Springer-Verlag.
Hilbert, D. (1904). «On the foundations of logic and arithmetic», en Heijenoort [1967], pp 129-138.

Hodges, W. (1977). *Logic*. London: Penguin Books.
— (1985-86). «Truth in a structure», *Proceedings of the Aristotelian Society*, n.° 86, pp. 135-151.
— (1988). «The present aims of model theory», *Jahrbuch der Kurt-Gödel-Gesellschaft*. (Viena). En prensa.
— (1985). *Building models by games*. London: Cambridge University Press.
— (1989). *Basic model theory*. Cambridge. Cambridge University Press.
Kleene, S. C. (1952). *Introduction to metamathematics*. Amsterdam: North Holland. Trad. *Introducción a la metamatemática*. Madrid: Editorial Tecnos [1974].
— (1976). «The work of Kurt Gödel», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 41, pp. 761-778.
Kneale, W. & M. (1962). *The development of logic*. Oxford: The Clarendon Press. Trad. *El desarrollo de la lógica*. Madrid: Editorial Tecnos, [1972].
Keisler, H. J. (1977). «Fundamentals of model theory», en Barwise, ed., [1977], pp. 47-103.
Kreisel, G. y Krivine, J. L. (1971). *Elements of mathematical logic: model theory*. Amsterdam: North Holland.
Kronecker, L. (1882). «Grunzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen», *Crelle's Journal*, vol. 92, pp. 1-122.
Lindström, P. (1969). «On extensions of elementary logic», *Theoria*, vol. 39, pp. 1-11.
Löwenheim, L. (1915). «Über Moglichkeiten im Relativkalkül», traducción inglesa en Heijenoort, [1967], pp. 228-251.
McCarty, C. y Tennant, N. (1987). «Skolem's paradox and constructivism», *Journal of Philosophical Logic*, vol. 16, pp. 165-202.
Macintyre, A. (1977). «Model completeness», en Barwise, ed. [1977].
Mal'cev, A. I. (1971). *The metamathematics of algebraic systems: collected papers, 1936-1967*. Amsterdam: North Holland.
Manin, Y. I. (1977). *A course in mathematical logic*. Berlin: Springer-Verlag.
Manzano, M. (1982). «Los sistemas generales», en *Estudios de lógica y filosofía de la ciencia*. Salamanca: Ed. Universidad de Salamanca, pp. 65-100.
Marsden, J. E. (1974). *Elementary classical analysis*. San Francisco: W. H. Freeman.
Mendelson, E. (1979). *Introduction to mathematical logic*. New York: Van Nostrand.
— (1961). «On non-standard models for number theory», en Bar-Hillel et al., eds. [1961].
Moore, G. H. (1980). «Beyond first-order logic: the historical interplay between mathematical logic an axiomatic set theory», en *History and philosophy of logic*. Vol. I, pp. 95-137.
Morgenbesser, S., ed. (1967). *Philosophy of science today*. New York: Basic Books.
Morley, M. (1965). «Categoricity in power», *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 114, pp. 514-538.
Morley, M. D., ed. (1973). *Studies in model theory*. Buffalo, New York: The Mathematical Association of America.
Mosterin, J. (1983). *Lógica de primer orden*. (3.ª edición) Barcelona: Ariel.
— (1988). *Kurt Gödel: obras completas*. (2.ª edición) Madrid: Alianza Universidad.
— (1971). *Teoría axiomática de conjuntos*. Barcelona: Ariel.
Mostowski, A. (1979). «Thirty years of foundational studies», en *Foundational Studies: selected works*. Vol. I. (Studies in Logic and the foundations of mathematics, vol. 93). Amsterdam: North Holland.
Poizat, Bruno (1985). Cours de Théorie des Modèles.
Popper, K. (1974). «Some philosophical comments on Tarski's theory of truth», en Henkin, et al., eds. [1974], pp. 397-409.
Post, E. L. (1921). «Introduction to a general theory of elementary propositions», en Heijenoort, ed., [1967], pp. 264-283.
Putnam, H. (1980). «Models and reality», *Journal of Symbolic Logic*, vol. 45, pp. 464-482.
Quine, W. V. (1950). *Methods of logic*. New York: Holt. Trad. *Los métodos de la lógica*.

Barcelona: Ariel.
Rasiowa, H. y Sikorski, R. (1963). *The mathematics of metamathematics*. Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe.
Robbin, J. W. (1969). *Mathematical logic: a first course*. New York: W. A. Benjamin.
Robinson, A. (1956). *Complete theories*. Amsterdam: North Holland.
— (1963). *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*. Amsterdam: North Holland.
— (1973). «Model theory as a framework for algebra» en Morley, M. D., ed. [1973].
— (1974). *Non-standard analysis*. Amsterdam: North Holland.
— (1961). «On the construction of models», en Bar-Hillel, et al., eds. [1971].
Rogers, R. (1971). *Mathematical logic and formalized theories: a survey of basic concepts and results*. Amsterdam: North Holland.
Sacristán, M. (1964). *Introducción a la lógica y al análisis formal*. Barcelona: Ariel.
Shelah, S. (1975). «The lazy model-theoretician's guide to stability», *Logique et Analyse*, 1975, pp. 241-308.
Shoenfield, J. R. (1967). *Mathematical logic*. Massachusetts: Addison & Wesley.
Skolem, T. H. (1970). «A critical remark on foundational research», en Skolem [1970].
— (1970). «Peano's axioms and models of arithmetic», en Skolem [1970].
— (1970). *Selected works in logic*. J. E. Fenstad, ed. Oslo: Universitetsforlaget.
— (1970). «Some remarks on the foundation of set theory», en Skolem [1970].
Smullyam, R. M. (1968). *First order logic*. Berlin: Springer-Verlag.
Suppes, P. (1960). *Axiomatic set theory*. New York: Dover.
Szmielew, W. (1955). «Elementary properties of Abelian groups», *Fundamenta Mathematicae*, vol. 41, pp. 203-271.
Tarski, A. (1954). «Contributions to the theory of models I, II», *Indagaciones Mathematicae*, vol. 16, pp. 572-581 y 582-588.
— (1955) «Contributions to the theory of models III», *Indagaciones Mathematicae*, vol. 17, pp. 56-64.
— (1956). *Logic, semantics, metamathematics*. Oxford: Clarendon Press.
— (1936). «O pjciu wyniknia logicznego», *Przeglad Filozoficzny*, vol. 39, pp. 58-68. Trad. «Sobre el concepto de consecuencia lógica», en Castrillo, P. y Vega, L., eds., [1984].
— (1952). «Some notions and methods on the borderline of algebra and methamatematics», en *Proceedings of the International Conference of Mathematicians*. Vol. I, pp. 709-720. Providence, R. I.: The Congress.
Tarski, A., Mostowski, A., y Robinson, R. D. (1953). *Undecidable theories*. Amsterdam: North Holland.
Tarski, A., y Vaught, R. L. (1957). «Arithmetical extensions of relational systems», *Compositio Mathematica*, vol. 13, pp. 81-102.
Van den Dries, L. (1988). «Alfred Tarski's elimination theory for real closed fields», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 53, pp. 7-19.
Vaught, R. L. (1986) «Alfred Tarski's work in model theory», *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 51, pp. 869-882.
— (1954). «Applications of the Löwenheim-Skolem-Tarski theorem to problems of completeness and decidability», *Indagaciones Mathematicae*, vol. 16, pp. 467-472.
— (1974). «Model theory before 1945» en Henkin, et al., eds. [1974], pp. 153-172.
— (1973). «Some aspects of the theory of models», *American Mathematical Monthly*, vol. 80, pp. 3-37.
Wang, H. (1970). «A survey of Skolem's work in logic», en Skolem [1970], pp. 17-52.
— (1961). «Process and existences in mathematics», en Bar-Hillel, et al., eds. [1961].
— (1981). «Some facts about Kurt Gödel». *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 46, pp.

653-659.

Wittgenstein, L. (1921). *Tractatus logico-philosphicus*. Edición bilingüe alemán-español, Madrid: Alianza, 1973.

Zamansky, M. (1967). *Introducción al algebra y al análisis moderno*. Barcelona: Montaner y Simón.

INDICE ANALITICO